UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Geometria III

2627-3-E3501Q055

Obiettivi

L'insegnamento ha lo scopo di introdurre la teoria del gruppo fondamentale e dei rivestimenti topologici e la teoria delle varietà differenziali.

I risultati di apprendimento attesi includono:
(1) Conoscenza e comprensione: lo studente dovrà acquisire la conoscenza delle definizioni e dei risultati basilari nell'ambito della teoria del gruppo fondamentale e delle varietà differenziali, così come di importanti esempi illustrativi della teoria discussa durante il corso. Dovrà comprendere le principali tecniche dimostrative presentate.
(2) Capacità di applicare conoscenze: lo studente acquisisce la capacità di applicare le conoscenze assimilate nella risoluzione di problemi e nello studio di esempi concreti.
(3) Autonomia di giudizio: lo studente dovrà essere capace di riconoscere dimostrazioni fallaci e nessi logici errati, nonchè di elaborare collegamenti con altre discipline in cui compaiono gli argomenti del corso.
(4) Abilità comunicative: lo studente dovrà essere in grado di esprimere concetti matematici relativi alla geometria differenziale e alla topologia algebrica con la massima chiarezza e con elevato rigore espositivo. Lo studente dovrà maneggiare con disinvoltura anche il linguaggio e le nozioni precedentemente assimilate in altri corsi valutati come prerequisiti.
(5) Capacità di apprendimento: lo studente dovrà assimilare le basilari tecniche di apprendimento per poter poi sviluppare le conoscenze acquisite nel proprio percorso futuro.

Contenuti sintetici

Gruppo fondamentale, rivestimenti di uno spazio topologico e loro proprietà. Varietà differenziali astratte: carte, atlanti, spazio tangente, fibrato tangente, calcolo differenziale sulle varietà. Immersioni, sottovarietà, valori critici e valori regolari. Campi di vettori, flussi, gruppi di Lie e parentesi di Lie. Forme differenziali, teorema di Stokes, coomologia di de Rham.

Programma esteso

Il corso si suddivide in 3 moduli distinti da 16 ore ciascuno.

I: ***Gruppo fondamentale, rivestimenti e proprietà***.

Definizione di gruppoide fondamentale e gruppo fondamentale puntato. Funzione indotta sui gruppi fondamentali da una funzione continua. Dipendenza dal punto base. Invarianza per equivalence omotopica del gruppo fondamentale. Spazi contraibili e 1-connessi. Definizione di rivestimento topologico. Esempi e proprietà. Teorema di sollevamento per funzioni continue puntate. Sollevamento di cammini e omotopie. Gruppo fondamentale del cerchio. Equivalenze di rivestimenti. Corrispondenza fra sottogruppi del gruppo fondamentale e rivestimenti. Rivestimento universale. Teorema di Seifert Van-Kampen e presentazione di gruppi. Azioni propriamente discontinue.

II: ***Varietà differenziali e campi vettoriali***
Definzione di varietà topologica e atlante differenziale. Definizione di funzioni lisce. Spazio tangente associato a una varietà differenziale. Derivazioni puntuali e velocità di curve. Il differenziale di una mappa liscia. Definizione di valore critico e valore regolare per funzioni lisce. Immersioni ed embedding. Sottovarietà di una varietà liscia. Teorema del valore regolare e del rango costante. Definizione di gruppo di Lie e sottogruppi di Lie. Esempi notevoli. Fibrato tangente a una varietà liscia. Campi vettoriali e derivazioni globali. Il commutatore fra campi vettoriali. Curve integrali e problemi di Cauchy. Completezza di campi vettoriali. Flusso di un campo vettoriale. Campi vettoriali invarianti su un gruppo di Lie. L'algebra di Lie associata a un gruppo di Lie.

III: ***Forme differenziali su varietà lisce.***
Fibrato cotangente a una varietà e sue potenze esterne. Forme differenziali su una varietà liscia. Coomologia di De Rham: forme chiuse e forme esatte. Orientazione per varietà lisce. Varietà orientate e integrazione di forme a supporto compatto. Partizione dell'unità e integrazione. Il teorema di Stokes. Coomologia in grado massimo per varietà orientate compatte. Grado di una mappa liscia fra varietà orientate compatte. Formula del grado. Invarianza per omotopia della coomologia di De Rham e lemma di Poincarè. Successioni esatte di spazi vettoriali. Succesione esatta di Mayer Vietoris. Calcoli espliciti su teorema di Stokes e coomologia di De Rham.

Prerequisiti

Sono ritenuti **prerequisiti imprescindibili** i contenuti degli insegnamenti di Geometria I e II, di Analisi Matematica I e II, di Algebra Lineare e Geometria, di Algebra I.

Modalità didattica

Lezione frontale (Didattica Erogativa 6 CFU, 48 ore) alla lavagna, in presenza, in italiano.

Materiale didattico

Testi di riferimento

Per il modulo relativo a gruppo fondamentale e rivestimenti:

1. G. Bredon - *Topology and Geometry (Capitolo 3)*
2. J. Munkres - *Topology (Capitolo 9-11-13)*
3. A. Hatcher - *Introduction to algebraic topology (Capitolo 3)*

Per i moduli relativi alla nozione di varietà differenziabili e di coomologia di De Rham la bibliografia suggerita è la seguente:

1. L. Tu - An introduction to Manifolds.
2. J. Lee - Introduction to Smooth Manifolds.
3. R. Bott, L.Tu - Differential forms in algebraic topology. (Capitolo 1).

A queste referenze si aggiungono le note del corso.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

- La verifica del profitto si basa su due prove, valutate sulla base della correttezza, della completezza, del rigore e della chiarezza delle risposte fornite.

  Prova scritta - conta di 4 esercizi che copriranno 3 possibili tipologie, precisamente esercizi di calcolo, definizioni ed esempi, piccole dimostrazioni. Il punteggio massimo ottenibile è **28 punti**. Per poter accedere alla prova orale è necessario totalizzare un punteggio minimo di **14 punti.**
  Prova orale - Si deve rispondere a due domande su argomenti trattati durante il corso o sugli esercizi della prova scritta, insistendo sui punti poco chiari.
  Il voto finale corrisponderà alla somma del punteggio totalizzato nelle due prove, **entrambe obbligatorie**.
  L'esame mira a verificare le conoscenze e le compentenze sviluppate, oltre che ad esaminare la chiarezza espositiva del candidato.
  Non sono previste prove in itinere.

Orario di ricevimento

Su appuntamento, concordato con il docente.

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ