



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA**

SYLLABUS DEL CORSO

Statistica Matematica

2627-3-E3501Q062

Obiettivi

Conoscenza e capacità di comprensione

Lo studente acquisirà una solida conoscenza dei principali concetti della statistica inferenziale, con particolare attenzione alla teoria degli stimatori, all'informazione di Fisher, agli intervalli di confidenza e ai test di ipotesi. Verranno approfonditi i modelli statistici formali e i fondamenti teorici alla base della stima e dell'inferenza, sviluppando una comprensione rigorosa dei metodi statistici dal punto di vista matematico.

Capacità di applicare conoscenza e comprensione

Lo studente sarà in grado di applicare in modo critico le tecniche statistiche a problemi concreti, selezionando modelli adeguati e utilizzando strumenti computazionali (in particolare il software R) per l'analisi di dati reali o simulati. Sarà inoltre in grado di valutare l'efficienza e le proprietà degli stimatori all'interno di modelli specifici.

Autonomia di giudizio

Lo studente svilupperà la capacità di analizzare in modo autonomo problemi inferenziali, valutando criticamente le assunzioni dei modelli e le implicazioni delle scelte metodologiche. Saprà confrontare diversi metodi inferenziali e motivare le scelte operate in contesti teorici e applicati.

Abilità comunicative

Lo studente sarà in grado di esporre con chiarezza e rigore argomenti teorici e applicativi della statistica matematica, utilizzando un linguaggio tecnico appropriato. Saprà redigere relazioni sull'analisi statistica dei dati e presentare i risultati ottenuti sia a interlocutori specialisti che non specialisti.

Capacità di apprendimento

Lo studente svilupperà le competenze necessarie per affrontare in modo autonomo lo studio di testi avanzati di statistica e per approfondire in maniera indipendente aspetti teorici e applicativi del campo, anche in vista di un eventuale percorso di studi magistrale o attività di ricerca.

Contenuti sintetici

Il corso inizia con brevi richiami di calcolo delle probabilità relativi a variabili aleatorie, distribuzioni principali, momenti e vettori gaussiani. Il nucleo del programma si sviluppa poi sulla statistica matematica: la teoria dei campioni e le statistiche sufficienti; la stima puntuale tramite i concetti di consistenza, errore quadratico medio e metodo dei momenti; e la teoria degli intervalli di confidenza. Infine, viene trattata la teoria dei test di ipotesi sia in contesti esatti tramite il rapporto di verosimiglianza, sia in ottica asintotica per grandi campioni sfruttando le proprietà degli stimatori di massima verosimiglianza, inclusi i test di Wald e LRT asintotici.

Programma esteso

Il programma è uguale per frequentanti e non frequentanti.

Richiami di Calcolo delle Probabilità

- ? Variabili aleatorie discrete e assolutamente continue, con relative densità.
- ? Analisi dettagliata delle distribuzioni discrete notevoli: Bernoulli, Binomiale, Geometrica, Poisson e Uniforme discreta.
- ? Analisi delle distribuzioni continue notevoli: Uniforme, Esponenziale, Gamma e Normale (Gaussiana).
- ? Calcolo dei momenti di ordine n , del valore atteso, della varianza e introduzione alle funzioni caratteristiche.
- ? Studio dei vettori gaussiani: definizione tramite combinazioni lineari, vettore delle medie, matrice di covarianza e proprietà di indipendenza stocastica legata all'incorrelazione.

Teoria del Campionamento e Statistiche Sufficienti

- ? Definizione di campione statistico estratto da una popolazione e formalizzazione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.).
- ? Struttura probabilistica del campione: densità congiunta.
- ? Studio delle statistiche campionarie fondamentali: media campionaria e varianza campionaria, con verifica analitica delle loro proprietà e dei rispettivi valori attesi.
- ? Definizione formale di statistica sufficiente per un parametro incognito e applicazione del criterio di fattorizzazione per l'identificazione della sufficienza.

Teoria della Stima Puntuale

- ? Definizione di stimatore puntuale e studio sistematico della proprietà di consistenza
- ? Richiami operativi sulla Legge Debole dei Grandi Numeri (LDGN) e sui principali concetti di convergenza (in probabilità e in legge).
- ? Errore Quadratico Medio (MSE) come misura di accuratezza: scomposizione in varianza e distorsione (bias) dello stimatore.
- ? Criteri di ottimalità nella stima: ricerca di stimatori non distorti a varianza minima (Best Unbiased Estimators - BUE).
- ? Metodologie classiche per la costruzione degli stimatori puntuali: approfondimento sul metodo dei momenti.

Stima per Intervalli (Intervalli di Confidenza)

- ? Inquadramento del problema della stima intervallare: definizione di coppia di statistiche per delimitare il parametro d'interesse.
- ? Definizione formale del livello di confidenza e del coefficiente di confidenza minimale.
- ? Metodi costruttivi per intervalli di confidenza esatti ed esempi applicativi su modelli notevoli (es. stima della frequenza in modelli Bernoulliani o parametri di modelli Gamma).

Test di Ipotesi Statistiche (Teoria Esatta)

- ? Formulazione logico-matematica delle ipotesi statistiche: partizione dello spazio dei parametri in ipotesi nulla (H_0) e ipotesi alternativa (H_1).

? Definizione della regione di rifiuto e formalizzazione degli errori decisionali: Errore di Prima Specie (rifiutare H_0 quando è vera) ed Errore di Seconda Specie (accettare H_0 quando è falsa).
? Definizione e studio della funzione di potenza del test statistico e ampiezza del test.
? Struttura del test del rapporto di verosimiglianza (Likelihood Ratio Test - LRT) in contesti esatti e ruolo delle statistiche sufficienti nella riduzione dello spazio campionario.

Teoria Asintotica e Grandi Campioni

? Analisi del comportamento delle famiglie di stimatori al tendere dell'ampiezza campionaria all'infinito: proprietà di consistenza e normalità asintotica.
? La teoria della Massima Verosimiglianza: definizione della funzione di log-verosimiglianza e costruzione degli Stimatori di Massima Verosimiglianza (MV).
? Studio dell'Informazione di Fisher (attesa e osservata) e legame con l'efficienza asintotica degli stimatori di massima verosimiglianza.
? Proprietà di consistenza locale e globale del punto di massimo della log-verosimiglianza sotto opportune condizioni di regolarità.

Test Asintotici

? Costruzione di test statistici basati su approssimazioni per grandi campioni.
? Comportamento asintotico della statistica del rapporto di verosimiglianza: il Teorema sulla convergenza della statistica $-2 \log(?)$ a una distribuzione Chi-quadro sotto l'ipotesi nulla.
? Il Test di Wald basato sull'asintotica normalità degli stimatori di MV.

Introduzione a R

Prerequisiti

Analisi matematica I e II, in particolare calcolo integrale.

Probabilità di base: leggi di variabili aleatorie discrete e continue. Valore atteso e varianza. Legge di funzioni di variabili aleatorie. Indipendenza. Convergenza di successioni di variabili aleatorie.

Modalità didattica

Si utilizza un approccio didattico ibrido che combina didattica frontale (DE) e didattica interattiva (DI). La DE sarà largamente maggioritaria (80 %) include la presentazione e spiegazione dettagliata dei contenuti teorici. La DI prevede interventi attivi degli studenti tramite esercizi e problemi, brevi interventi, discussioni collettive e lavori di gruppo o individuali anche utilizzando software statistico (es. R).

Le lezioni (48 ore 6 cfu) si svolgono in presenza e sono tenute in italiano. Su richiesta e previo accordo tra docente e studenti sarà possibile l'utilizzo della lingua inglese.

Compatibilmente con gli strumenti di registrazione a disposizione le lezioni saranno registrate e messe a disposizione sul sito di e-learning.

Materiale didattico

Dispense del Docente

Statistical inference / George Casella, Roger L. Berger. https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://pages.stat.wisc.edu/~shao/stat610/Casella_Berger_Statistical_Inference.pdf&ved=2ahUKEwjJjq7Bk4yVAXUp1wIHHQmmCQYQFnoECA4QAQ&usg=AOvVaw3vA7hSUPxpugJ-ZDtidArd

Introduzione alla statistica di A.M.Mood, F.A.Graybill, D.C.Boes, 1991, McGraw-Hill Italia,ISBN: 9788838606618
An Introduction to Mathematica Statistics: F. Bijma, M. Jonker, A. van der Vart, Amsterdam University Press

Altro materiale: slide delle lezioni e degli esercizi su elearning.unimib.it

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Secondo semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame si compone di due parti (Scritto obbligatorio e Orale opzionale)

Lo scritto è obbligatorio, ed è superato solo se si ottiene una valutazione maggiore o uguale a 16.

L'orale è obbligatorio se si desidera una valutazione superiore a 28 o se si è conseguita alla scritto una valutazione inferiore a 20.

L'orale può comunque sempre essere richiesto sia dal docente che dallo studente e deve essere sostenuto nella stessa sessione dello scritto.

Lo scritto consiste di

2. domande a risposta aperta (sui concetti teorici descritti nel corso, ivi comprese le richieste di enunciare una definizione e/o enunciare e dimostrare teoremi)
2. esercizi scritti: applicazione dei concetti teorici e di tecniche analoghe agli esercizi proposti a lezione e per casa. presentazione

Durante lo scritto non è consentito tenere materiale didattico, eccetto un formulario fornito su moodle

L'orale è a richiesta del docente e/o dello studente ed è un colloquio sullo scritto, sugli argomenti svolti a lezione e sulla relazione. Nell'orale sono valutate le stesse qualità delle risposte che sono valutate nello scritto.

Orario di ricevimento

Su appuntamento

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÀ
