



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Mathematics for Sustainable Scenarios

2627-2-F7603Q033-F7603Q03302

Obiettivi formativi

Il corso ha l'obiettivo di fornire agli studenti gli strumenti matematici dinamici necessari per analizzare e comprendere l'evoluzione temporale di sistemi complessi in ambito ecologico, economico e socio-ambientale. A partire dai fondamenti delle equazioni differenziali e delle equazioni alle differenze, lo studente acquisirà la capacità di formalizzare matematicamente la dinamica di popolazioni, risorse naturali e variabili economiche, comprendendo il ruolo cruciale della non-linearità nel generare comportamenti quali-quantitativamente diversi: equilibri stabili o instabili, oscillazioni periodiche, biforcazioni e caos deterministico.

Parallelamente, il corso introduce lo studente all'evoluzione storica del pensiero modellistico, da Malthus (1798) a Verhulst (1838), Gompertz (1825), Lotka-Volterra (1920-1926) fino ai modelli integrati più recenti come il World3 (1972), Brander-Taylor (1998), Pezzey-Anderies (2001) e HANDY (2014). Lo studente acquisirà consapevolezza del valore euristico dei modelli matematici come "esperimenti mentali" per esplorare scenari di sostenibilità o collasso, nonché dei limiti intrinseci di ciascuna modellistica.

Un elemento qualificante del corso è l'integrazione della biodiversità come tema trasversale: lo studente comprenderà il ruolo della diversità biologica come fondamento dei servizi ecosistemici e come fattore di resilienza, nonché gli strumenti modellistici (relazione specie-area, metapopolazioni, modelli spaziali) per quantificare gli effetti della frammentazione degli habitat e del degrado ambientale.

Al termine del corso, lo studente sarà in grado di:

- Formalizzare matematicamente semplici problemi dinamici in ambito ecologico ed economico, traducendo in equazioni differenziali o alle differenze le relazioni qualitative tra variabili (popolazione, risorse, ricchezza, inquinamento).
- Analizzare la dinamica di modelli a una o più variabili, determinando punti di equilibrio, studiandone la stabilità mediante analisi lineare (autovalori per sistemi di ODE, derivata per mappe unidimensionali) e interpretando i risultati in termini di sostenibilità o vulnerabilità del sistema.

- Simulare numericamente i modelli proposti, utilizzando strumenti computazionali per esplorare l'effetto della variazione dei parametri e per visualizzare traiettorie, ritratti di fase e diagrammi di biforcazione.
- Valutare criticamente i modelli esistenti (World3, HANDY, Brander-Taylor, ecc.) identificandone assunzioni, limiti, campi di validità e implicazioni per le politiche di sostenibilità, inclusi i trade-off tra sviluppo economico, conservazione della biodiversità e salute pubblica.
- Applicare le nozioni di capacità portante, resilienza e soglie ecologiche all'analisi di casi studio quali la gestione delle risorse rinnovabili, la conservazione degli habitat, gli effetti della disuguaglianza sulle dinamiche di collasso.

Contenuti sintetici

- FONDAMENTI MATEMATICI
- ORIGINI E MODELLI DI POPOLAZIONE E BIODIVERSITÀ
- INTEGRAZIONE ECONOMIA-AMBIENTE

Programma esteso

PARTE 1: FONDAMENTI MATEMATICI

- Equazioni Differenziali
Definizioni e classificazioni: ODE lineari e non-lineari, primo ordine e sistemi
Interpretazione geometrica: campi di direzione e ritratti di fase
Soluzione analitica per ODE lineari del primo ordine
Il concetto di punto di equilibrio e stabilità
- Equazioni alle Differenze
Definizione e interpretazione dei modelli a tempo discreto
Crescita geometrica e mappa logistica come esempio introduttivo
Stabilità dei punti fissi in una dimensione
Biforcazioni: il concetto di cambio di regime
- Strumenti per l'Analisi Dinamica
Sistemi di equazioni differenziali: punti di equilibrio
Analisi di stabilità lineare: autovalori e loro interpretazione
Cicli limite e biforcazioni: transizioni tra comportamenti qualitativamente diversi
- Caos deterministico

PARTE 2: LE ORIGINI E MODELLI DI POPOLAZIONE E BIODIVERSITÀ

- Il Modello di Malthus (1798)
La Crescita Illimitata

Modello esponenziale

Analisi: Soluzione esponenziale, tempo di raddoppio, crescita esplosiva, Assenza di freni endogeni
La versione discreta

- Il Modello di Verhulst (1838)
La Capacità Portante
Analisi: Punti di equilibrio, stabilità di K, crescita sigmoide
La versione discreta: Mappa logistica
cascata di raddoppi di periodo, caos
- Il Modello di Gompertz (1825)
La asimmetria
Il tasso di crescita variabile
La versione discreta
Biforcazioni caos
- Modello di Lotka-Volterra (1920-1926)
Interazione Preda-Predatore
Analisi: Cicli limite, punto di equilibrio, dinamiche oscillanti
- Modello di MacArthur e Wilson (1967)
La Relazione Specie-Area
Frammentazione degli Habitat
- Modello di Levins (1969)
Modelli di metapopolazione
Modelli Spaziali per la biodiversità
Analisi dinamica
Comportamenti complessi

PARTE 3: L'INTEGRAZIONE ECONOMIA-AMBIENTE

- Il Modello World3 (1972)
I Limiti della Crescita su Scala Globale
Modello di dinamica dei sistemi di Forrester e Meadows
Interazione tra popolazione, produzione industriale, inquinamento e risorse
Collasso vs. stabilizzazione
- Il Modello di Brander e Taylor (1998)
L'Isola di Pasqua
Modello preda-predatore con scelta economica
Allocazione del lavoro tra sussistenza e produzione di "prestigio"
- Il Modello di Pezzey e Anderies (2001)
Estensione del Modello di Taylor
Introduzione di un requisito di sussistenza minimo
Politiche di conservazione (tasse, quote)
- Il Modello HANDY (Human And Nature DYnamics) (2014)
Modello a 3 variabili: Popolazione, Ricchezza, Risorse Naturali
Disuguaglianze
Punti di equilibrio (sostenibile, collasso),
biforcazioni (Hopf, transcritica)

Prerequisiti

Questi sono i prerequisiti minimi senza i quali il corso non può essere seguito, gli studenti devono arrivare con queste conoscenze già acquisite; per alcuni degli argomenti di algebra lineare è previsto un modulo di ripasso iniziale.

- Funzioni elementari
Conoscenza approfondita di esponenziali, logaritmi e funzioni trigonometriche.
- Equazioni e Funzioni
Risoluzione di equazioni: Equazioni lineari, quadratiche, esponenziali e logaritmiche.
Studio di funzione: Calcolo di limiti, asintoti, punti di massimo/minimo.
- Calcolo Differenziale e Integrale
Derivate: Concetto di derivata come tasso di variazione, regole di derivazione (prodotto, quoziente, catena).
Integrali: Integrazione di funzioni elementari, integrazione per parti, sostituzione.
- Algebra Lineare di Base
Vettori e matrici: Operazioni fondamentali (somma, prodotto, inversa).
Determinante e autovalori: Concetto di autovalore e autovettore, calcolo del determinante per matrici
Sistemi lineari: Risoluzione di sistemi di equazioni lineari.
- Equazioni e Funzioni
Risoluzione di equazioni: Equazioni lineari, quadratiche, esponenziali e logaritmiche.
Studio di funzione: Calcolo di limiti, asintoti, punti di massimo/minimo.

Metodi didattici

Lezioni di teoria ed esercitazioni frontali; tutte le 32 ore di lezione e di esercitazione sono di tipo erogativo, da sviluppare lungo 16 incontri.

Modalità di verifica dell'apprendimento

La valutazione finale consiste in un esame scritto, che può essere completato da un esame orale facoltativo. Nell'esame scritto, gli studenti devono risolvere esercizi ed eventualmente rispondere a domande aperte. Gli esercizi riguardano le modellistiche proposte durante lo svolgimento del corso. Nell'esame orale, gli studenti devono essere in grado di discutere tutti gli argomenti trattati nel corso, includendo sia gli aspetti teorici sia pratici. L'esame orale opzionale può influire sia positivamente sia negativamente sul voto finale.

Testi di riferimento

Slide del corso e materiale didattico, comprensivo di esercizi e soluzioni, fornito sulla piattaforma di e-learning. Per approfondimenti e per le fonti originarie dei metodi matematici e delle modellistiche considerate si rinvia ai seguenti:

FONDAMENTI MATEMATICI

- Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* (2nd ed.). Elsevier Academic Press.
- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology* (2nd ed.). Springer.
- Elaydi, S. N. (2005). *An Introduction to Difference Equations* (3rd ed.). Springer.

LE ORIGINI E MODELLI DI POPOLAZIONE E BIODIVERSITÀ

- Malthus, T. R. (1798). *An Essay on the Principle of Population*. London: J. Johnson.
- Verhulst, P. F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*, 10, 113-121.
- Gompertz, B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 115, 513-583.
- Lotka, A. J. (1925). *Elements of Physical Biology*. Baltimore: Williams & Wilkins.
- Volterra, V. (1926). Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. *Nature*, 118, 558-560.
- MacArthur, R. H., & Wilson, E. O. (1967). *The Theory of Island Biogeography*. Princeton University Press.
- Levins, R. (1969). Some demographic and genetic consequences of environmental heterogeneity for biological control. *Bulletin of the Entomological Society of America*, 15, 237-240.

L'INTEGRAZIONE ECONOMIA-AMBIENTE

- Forrester, J. W. (1971). *World Dynamics*. Wright-Allen Press.
- Meadows, D. H., Meadows, D. L., Randers, J., & Behrens, W. W. (1972). *The Limits to Growth*. Universe Books.
- Brander, J. A., & Taylor, M. S. (1998). The simple economics of Easter Island: A Ricardo-Malthus model of renewable resource use. *American Economic Review*, 88(1), 119-138.
- Pezzey, J. C. V., & Anderies, J. M. (2001). The effect of subsistence requirements on the collapse of a resource-dependent society. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 45(2), 145- 165.
- Motesharrei, S., Rivas, J., & Kalnay, E. (2014). Human and nature dynamics (HANDY): Modeling inequality and use of resources in the collapse or sustainability of societies. *Ecological Economics*, 101, 90-102.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre

Lingua di insegnamento

Inglese

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÀ
