UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Geometria II

2627-2-E3502Q009

Obiettivi

Lo scopo dell'insegnamento è introdurre la teoria e l'utilizzo delle forme differenziali e della loro integrazione nel contesto degli spazi euclidei e dei loro sottoinsiemi aperti, come premessa della generalizzazione alle varietà differenziali.

Le forme differenziali sono uno strumento pervasivo e di importanza fondamentale in Geometria, Topologia Differenziale e Analisi; sono inoltre uno strumento imprescindibile nella formulazione della Fisica moderna. In particolare, la teoria conduce all'introduzione dei gruppi di coomologia di de Rahm, che legano le proprietà topologiche di uno spazio alle sue proprietà differenziali.

La teoria verrà sviluppata dai suoi principi primi algebrici, ossia dalla nozione di tensore in algebra lineare.

A tale scopo, nella prima parte del corso si insisterà su alcuni contenuti fondazionali di algebra lineare e tensoriale, quali per esempio la dualità, il ruolo del del determinante nella teoria dei tensori alternanti, l'orientazione di uno spazio vettoriale reale, gli elementi di volume in uno spazio vettoriale orientato euclideo. Questi concetti, oltre a essere pervasivi in Geometria, illustrano, arrichiscono e approfondiscono il bagaglio delle conoscenze di Algebra Lineare del primo anno.

La seconda parte del corso introdurrà la teoria delle forme differenziali su un aperto Euclideo, intese come tensori alternanti che dipendono in modo liscio da un punto base. In questa seconda parte i concetti algebrici introdotti nella prima verranno messi a contatto con gli strumenti dell'Analisi, introducendo in particolare il differenziale esterno e le sue proprietà funtoriali, l'integrazione di una k-forma differenziale su certi sottoinsiemi parametrizzati e gli spazi di coomologia di de Rham.

Particolare enfasi verrà data al concetto di forma d'area e alle tecniche di calcolo dell'area, di spazio tangente e alla sua determinazione.

L'approdo del corso è il Teorema di Stokes, anche noto come Teorema della Divergenza, che è cruciale in moltissimi ambiti della Matematica (e della Fisica).

I concetti introdotti in questo insegnamento saranno inoltre ulteriormente sviluppati in Geometria III (nell'ambito delle varietà differenziali), nonché in svariati insegnamenti della Laurea Magistrale in Matematica.

I risultati di apprendimento attesi includono:

- Conoscenze: la conoscenza e la comprensione delle definizioni e degli enunciati fondamentali, nonché delle strategie di dimostrazione basilari utilizzate nella teoria delle forme differenziali; la conoscenza e la comprensione di alcune sue applicazioni, in particolare allo studio di mappe lisce proprie tra aperti in spazi euclidei e del loro grado; la conoscenza e la comprensione di alcuni esempi chiave in cui si esplica la teoria. Tali conoscenze verranno sviluppate attraverso la discussione approfondita dei concetti e degli enunciati chiave della teoria, nonché l'analisi critica delle relative dimostrazioni e delle tecniche soggiacenti.
- Capacità: la capacità di applicare le conoscenze astratte acquisite alla risoluzione di semplici esercizi di calcolo e problemi teorici, richiamando in modo corretto e conseguente i risultati utilizzati; la capacità di maneggiare il calcolo algebrico, differenziale e integrale delle forme differenziali e di utilizzarlo nello studio di alcune semplici situazioni concrete, quali lo studio di mappe proprie; la capacità di applicare il bagaglio concettuale appreso alla costruzione e discussione di esempi concreti e alla risoluzione di esercizi; la capacità di esporre, comunicare e argomentare in modo chiaro, pertinente e preciso i contenuti teorici del corso. Predette capacità verranno acquisite attraverso la discussione di esempi salienti in cui i risultati teorici appresi verranno messi in luce in modo operativo, oltre alla soluzione di esercizi suggeriti agli studenti, sia di natura teorica che computazionale.
- Competenze trasversali: autonomia di giudizio, capacità comunicative e capacità di apprendere. Queste competenze verranno stimolate e sviluppate evidenziando i collegamenti concettuali e tecnici con i contenuti di altri insegnamenti (di algebra, algebra lineare e analisi) e valorizzando la chiarezza espositiva sia dei contenuti teorici che delle applicazioni computazionali (esercizi).

Contenuti sintetici

Algebra multilineare alternante; forme differenziali sullo spazio euclideo e loro operazioni; Teorema di Gauss-Green; coomologia di de Rahm; aree e integrazione di forme differenziali; orientazione; teorema di Stokes.

Programma esteso

Algebra esterna di uno spazio vettoriale e sue operazioni; prodotto esterno e contrazioni; spazi vettoriali orientati euclidei e loro elementi di volume; campi vettoriali e forme differenziali; differenziale esterno; forme chiuse e forme esatte; ; gradiente, rotore, divergenza; forme differenziali e mappe lisce: tirato-indietro; integrazione; integrazione e omotopia; formula del cambiamento di variabili; integrazione su sottovarietà orientate; Teoremi di Gauss-Green e Stokes.

Prerequisiti

Il contenuto dei corsi di Geometria I, di Analisi I e (in parte) II, di Algebra Lineare e Geometria.

Modalità didattica

Normalmente questo insegnamento viene impartito in modalità interamente erogativa in presenza, mediante lezioni ed esercitazioni frontali alla lavagna, che vengono anche videoregistrate e rese disponibili agli studenti sulla piattaforma elearning; la ripartizione per CFU è:
lezioni frontali alla lavagna (6 CFU)
esercitazioni frontali alla lavagna (2 CFU).
L'insegnamento viene erogato in lingua italiana.

Materiale didattico

Testi di riferimento: appunti del docente su e-learning

Letture consigliate:

un testo particolarmente attinente al contenuto del corso è il seguente:

- V. Guillemin and P. Haine, Differential forms, World Scientific 2019

Altre letture consigliate sono:

- M. Do Carmo, Differential forms and applications, Springer Verlag 1996;
- V. Guillemin, A. Pollack, Differential Topology 1974;
- W. Fulton, Differential Topology, a first course, Springer Verlag 1995.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

II semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame può sostenuto o utilizzando le due prove parziali *in itinere*, ovvero negli appelli regolari.

Le prove parziali scritte consistono in una combinazione flessibile di esercizi e di domande teoriche, ciascuna delle quali verte su una parte del programma (la prima e la seconda). L'esatta suddivisione per argomenti verrà comunicata con congruo anticipo durante lo svolgimento del corso. Quando opportuno, in casi specifici e a discrezione dei docenti, le prove parziali potranno essere integrate da una prova orale.

L'esame negli appelli regolari consiste sempre di due prove scritte, ma di tipologia diversa: una prova 'pratica' e una prova 'teorica'; quando opportuno, in casi specifici e a discrezione dei docenti, le prove scritte potranno essere integrate da una prova orale.

La prova pratica è propedeutica alla prova teorica.

Ciascuna delle due prove scritte di ogni appello regolare verte sull'intero programma del corso. Nella prova pratica verranno sottoposti agli studenti degli esercizi computazionali, mentre nella prova teorica verranno proposte delle domande su definizioni, enunciati di teoremi, dimostrazioni, costruzione di esempi e controesempi e semplici problemi teorici.

Sia nel caso delle prove parziali in itinere sia in quello degli appelli regolari, lo scopo della discussione conclusiva è di norma esporre allo studente la correzione dei suoi elaborati; in casi particolari, in cui lo svolgimento non permetta di evincere appieno la qualità della preparazione dello studente, la discussione può concorrere anch'essa alla valutazione finale.

Nelle prove pratiche verrà valutata la capacità dello studente di maneggiare con padronanza e precisione il formalismo introdotto e di utilizzarlo per eseguire semplici calcoli, nonché di mettere all'opera le conoscenze teoriche trasmesse, richiamandole in modo preciso e pertinente.

Nelle prove teoriche verranno valutate la conoscenza e la comprensione dell'impianto concettuale del corso, nonché la capacità di organizzare in modo lucido, efficace e ben strutturato un'esposizione coerente e puntuale.

Per superare l'esame, lo studente deve prima sostenere una prova pratica, ottenendo una votazione di almeno 18/30, quindi ottenere la sufficienza di 18/30 anche **nella prova teorica del medesimo appello ovvero, a sua scelta, dell'appello immediatamente successivo**. La prova pratica e quella teorica concorrono in egual misura al voto finale.

A ogni esercizio/quesito (o problema) teorico di ciascuna prova verrà attribuito un punteggio parziale massimo, in ragione della sua difficoltà e lunghezza; nella valutazione dello studente verrà assegnato un punteggio in corrispondenza di ogni esercizio/quesito (o problema) teorico non superiore a quello massimo previsto, in ragione dell'esattezza, della completezza, del rigore, della chiarezza e dell'organicità dello svolgimento.

Gli studenti, prima della verbalizzazione, hanno la facoltà di chiedere una discussione orale delle prove scritte.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ