

## COURSE SYLLABUS

### Financial Mathematics M

2627-2-F8206B029

---

#### Obiettivi formativi

Lo scopo del corso è quello di introdurre gli studenti agli strumenti matematici dei modelli di finanza in tempo continuo con particolare acento su processi stocastici, integrazione stocastica ed il loro impiego nei principali modelli di prezzo dei derivati.

Al termine del corso gli studenti saranno in grado di:

1. comprendere i principali concetti dei processi stocastici in tempo continuo adoperati in finanza matematica, incluse le martingale, il moto Browniano, la variazione quadratica e gli integrali stocastici;
2. applicare il calcolo di Ito per risolvere semplici equazioni differenziali stocastiche e derivare i principali risultati adoperati in finanza matematica;
3. comprendere la logica della valutazione neutrale al rischio ed il ruolo delle misure equivalenti di martingale nell'asset pricing;
4. derivare e interpretare la formula di Black-Scholes sia in una prospettiva PDE che con misure equivalenti di martingale;
5. riconoscere gli aspetti principali ed i limiti dei modelli base di volatilità stocastica, incluso il modello di Hull-White e di Heston;
6. risolvere esercizi utilizzando l'appropriata notazione matematica, un ragionamento rigoroso ed una interpretazione economica coerente.

#### Contenuti sintetici

Il corso copre gli strumenti matematici necessari per la finanza in tempo continuo e le loro applicazioni al prezzo dei derivati. Gli argomenti includono fondamenti di probabilità, aspettativa condizionata, processi a variazione finita, martingale, moto Browniano, variazione quadratica, integrale di Ito, formula di Ito, cambiamento di misura, il modello di Black & Scholes, il Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing ed un'introduzione ai modelli con volatilità stocastica

## Programma esteso

1. Richiami di probabilità:
  - (a) spazi di probabilità,
  - (b) proprietà del valore atteso,
  - (c) costruzione e proprietà del valore atteso condizionato;
2. Processi a variazione finita:
  - (a) definizione e proprietà;
  - (b) l'integrale stocastico rispetto a un processo VF;
3. Martingale:
  - (a) definizione e principali proprietà;
  - (b) il moto Browniano e le sue proprietà;
  - (c) la variazione quadratica di una martingala;
4. Integrale di Ito:
  - (a) l'integrale elementare;
  - (b) il teorema di estensione di Ito;
  - (c) proprietà dell'integrale stocastico rispetto ad una martingala;
5. Lemma di Ito e martingala esponenziale:
  - (a) l'espansione di Ito;
  - (b) il suo uso nella risoluzione di alcune equazioni differenziali stocastiche;
6. Formula di Tanaka e cambiamento di probabilità:
  - (a) l'integrazione per parti e la variazioni delle caratteristiche di un processo di Ito al cambiare della probabilità sottostante;
7. Modello di Black & Scholes:
  - (a) caratteristiche strutturali;
  - (b) la PDE di Black & Scholes;
  - (c) la misura equivalente;
8. Teorema fondamentale dell'Asset Pricing:
  - (a) l'esistenza delle probabilità neutrali al rischio e la loro applicazione nell'asset pricing;
9. Modelli a volatilità stocastica:
  - (a) le componenti stocastiche della volatilità e la completezza dei mercati;
  - (b) Il modello di Hull-White;
  - (c) il modello di Heston.
10. Alcuni titoli derivati

## Prerequisiti

Gli studenti devono avere una preparazione solida in probabilità, statistica e metodi matematici. In particolare, devono avere familiarità coi concetti di variabile aleatoria, aspettativa, probabilità condizionata, calcolo, algebra lineare e equazioni differenziali elementari. Conoscenze pregresse di matematica finanziaria sono auspicabili ma non necessarie.

## Metodi didattici

Il corso prevede lezioni ed esercitazioni per un totale di 42 ore. Le lezioni introducono i concetti teorici ed i risultati matematici mentre le esercitazioni si concentrano su esempi specifici, applicazioni e l'interpretazione dei modelli in tempo continuo. Il materiale didattico predisposto, quali gli appunti di lezione, potranno risultare utili nella

preparazione.

## **Modalità di verifica dell'apprendimento**

La valutazione del corso si basa su un esame scritto che include esercizi ideati per valutare sia la competenza tecnica che la comprensione concettuale. Gli esercizi servono a valutare l'abilità degli studenti nell'uso degli strumenti matematici introdotti nel corso, quali l'integrazione stocastica, la formula di Ito, la formula del cambiamento di misura e le tecniche di prezzo per i derivati. Il voto finale tiene in conto la correttezza delle soluzioni, il rigore del ragionamento e l'uso appropriato della notazione, la capacità di giustificare correttamente ogni passaggio e la comprensione dei nessi tra proprietà matematiche e applicazioni finanziarie.

## **Testi di riferimento**

S. Shreve, Stochastic Calculus for Finance, Springer, 2004.

Appunti predisposti dal docente.

## **Periodo di erogazione dell'insegnamento**

Primo semestre

## **Lingua di insegnamento**

Italiano. La tecnologia matematica, la terminologia e alcune fonti potrebbero essere in inglese.

## **Sustainable Development Goals**

ISTRUZIONE DI QUALITÀ

---