



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

## SYLLABUS DEL CORSO

### Matematica per l'Economia M

2627-1-F8206B025

---

#### Obiettivi formativi

Il corso di Matematica per l'Economia M si propone di fornire agli studenti le competenze fondamentali per l'analisi matematica applicata ai modelli economici, sviluppando capacità di comprensione e applicazione delle tecniche matematiche in contesti economici. In particolare, gli obiettivi formativi includono l'acquisizione di conoscenze sulle equazioni differenziali e sui sistemi dinamici, con particolare attenzione alla risoluzione esplicita, all'analisi qualitativa e alla stabilità delle soluzioni, nonché alla comprensione dei teoremi di esistenza e unicità. Il corso mira inoltre a sviluppare competenze nell'ambito dell'ottimizzazione dinamica e del controllo ottimo, fondamentali per l'analisi di modelli economici complessi, attraverso l'applicazione del principio del massimo di Pontryagin e delle condizioni di ottimalità. Infine, si intende introdurre gli studenti ai concetti di teoria della misura e dell'integrazione, con particolare attenzione alla misura di Lebesgue e alle sue proprietà, per favorire una comprensione approfondita degli strumenti matematici avanzati utilizzati in economia, in finanza quantitativa, e nelle scienze sociali.

Queste competenze si collegano strettamente all'area di apprendimento "Statistica" del corso di laurea magistrale in Scienze Statistiche ed Economiche, poiché forniscono le basi matematiche e analitiche necessarie per l'analisi statistica avanzata, la modellizzazione dei dati e l'interpretazione di fenomeni complessi, favorendo un approccio integrato tra teoria matematica e applicazioni statistiche.

Gli studenti acquisiranno competenze teoriche e pratiche, sviluppando la capacità di applicare tali conoscenze a problemi reali, interpretare criticamente i risultati e proporre soluzioni metodologicamente fondate. Il percorso formativo promuove l'autonomia di giudizio nell'uso di strumenti matematici e statistici, permettendo agli studenti di diventare professionisti più sicuri e indipendenti. Il corso contribuisce inoltre a consolidare le capacità di apprendimento e di aggiornamento nell'ambito dei metodi avanzati di analisi matematica e statistica, in coerenza con l'obiettivo di una formazione permanente.

#### Contenuti sintetici

Il corso si compone di tre parti. Le prime due sono strettamente interconnesse mentre la terza, oltre a qualche collegamento con la seconda, fornisce elementi utili in corsi come Finanza Matematica M.

Nella Parte I sono esposti gli elementi fondamentali della teoria dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Nella Parte II viene presentato un approccio alla risoluzione di problemi di controllo ottimo (in tempo continuo) e un risultato di esistenza di soluzioni.

Nella Parte III vengono forniti i primi rudimenti della teoria della misura e dell'integrazione e, come caso particolare, viene introdotto l'integrale di Lebesgue, dando enfasi ai risultati di convergenza (monotona e dominata).

## Programma esteso

Parte I (ODE):

- Equazioni differenziali in modelli economici, problemi di Cauchy e relativa nozione di soluzione.
- Riduzione di sistemi di ordine superiore al primo a sistemi del primo ordine.
- Risoluzione esplicita di alcune classi di equazioni differenziali: equazioni a variabili separabili, equazioni lineari, equazioni di Bernoulli, equazioni omogenee, equazioni esatte.
- Alcune applicazioni a modelli (evoluzione di prezzi di mercato soggetti ad aggiustamento, modello macroeconomico di crescita di Solow).
- Teoremi di esistenza ed unicità in piccolo ed in grande di soluzioni per problemi di Cauchy.
- Soluzioni d'equilibrio ed alcune nozioni di stabilità (Lyapunov, asintotica locale/globale) per soluzioni d'equilibrio.
- Elementi per l'analisi qualitativa di equazioni differenziali autonome.
- Sistemi di equazioni differenziali lineari: metodi per la risoluzione esplicita e per l'analisi della stabilità di soluzioni d'equilibrio.

Parte II (Controllo Ottimo):

- Ottimizzazione dinamica: descrizione di problemi di controllo.
- Il principio del massimo di Pontryagin (caso a dinamica lineare e caso generale).
- Condizioni sufficienti di ottimalità (condizione di Mangasarian e condizione di Arrow).
- Applicazioni ad alcuni modelli economici (modello di compravendita ottima, problema di massimizzazione della vendita).
- Il problema più semplice del calcolo delle variazioni come caso particolare di un problema di controllo ottimo e relativa applicazione (modello di investimento/pianificazione del consumo ottimo).
- Una condizione di esistenza di controllo ottimo (teorema di Filippov).

Parte III (Elementi di teoria della misura):

- Algebre e  $\sigma$ -algebre,  $\sigma$ -algebre generate.
- Misure su  $\sigma$ -algebre e loro proprietà.
- Costruzione della misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$ .
- Funzioni misurabili e loro proprietà.
- Integrale in uno spazio di misura e sue proprietà.
- Misure definite a mezzo di integrale ed assolutamente continue.
- Teoremi di convergenza (dominata (Lebesgue) e monotona (B. Levi)).
- L'integrale di Riemann e di Lebesgue a confronto.

## Prerequisiti

Nessuna propedeuticità. Tuttavia è consigliato che lo studente ripassi le proprie competenze sui seguenti argomenti di matematica, tipicamente impartiti in corsi di laurea triennali:

- Numeri complessi (nozioni di base);
- Integrazione di funzioni di una variabile reale;
- Calculus per funzioni di più variabili reali;
- Calcolo matriciale, determinante, invertibilità, rango;
- Autovalori e riduzione in forma diagonale di matrici;
- Forme quadratiche;
- Convessità/concavità di insiemi e funzioni.

## Metodi didattici

L'intera attività formativa verrà svolta attraverso lezioni. Tutte le lezioni sono svolte in presenza in modalità erogativa:

10 lezioni da 3 ore e 6 lezioni da 2 ore.

Durante lo svolgimento del corso verranno proposti esercizi da risolvere autonomamente in preparazione all'esame, alcuni dei quali verranno poi discussi in apposite sessioni organizzate dal docente.

## Modalità di verifica dell'apprendimento

L'esame si svolgerà in forma scritta e, in caso di superamento della prova scritta con una valutazione sufficiente ( $\geq 18/30$ ), in forma orale su richiesta dello studente o del docente. Non sono previste prove parziali in itinere.

Il formato di una prova scritta prevede essenzialmente i seguenti tipi di quesito:

- la risoluzione di 3 esercizi/problemi;
- la discussione in dettaglio di uno tra i modelli presentati nel corso;
- l'esposizione dettagliata di alcuni argomenti della teoria e la loro applicazione in casi specifici (domande aperte).

Nello svolgimento di una prova d'esame saranno valutati la capacità di analisi e di classificazione di un problema proposto, la capacità di scelta ed applicazione delle metodologie di risoluzione prospettate nella teoria, la profondità, la precisione e la completezza espositiva nella discussione di modelli e dell'apparato teorico svolto nel corso.

Il docente del corso rende anche disponibile materiale per la simulazione di una prova d'esame.

La valutazione finale della prova è espressa in trentesimi.

Sia nella prova scritta, sia nell'eventuale prova orale, viene applicata la seguente gradazione di giudizio in relazione ai seguenti parametri:

Conoscenza concettuale e capacità di comprensione  
Capacità di applicare conoscenza e comprensione  
Capacità comunicative e argomentative

Capacità di apprendimento, di autovalutazione e di autoregolazione.

#### **Votazione < 18**

Conoscenza e Comprensione: Lo studente identifica solo parzialmente le caratteristiche dei concetti. Le connessioni tra i concetti risultano frammentarie e scarsamente supportate da conoscenze teoriche.

Capacità di applicare conoscenza e comprensione: Lo studente individua solo alcuni elementi rilevanti nell'analisi di un problema o di un esercizio, senza riuscire a integrarli in un'analisi organica.

Capacità comunicative e argomentative: Nella prova scritta e orale lo studente elabora un'argomentazione essenziale, priva di articolazione logica e caratterizzata da numerose imprecisioni espositive.

Capacità di apprendimento, di autovalutazione e di autoregolazione: Lo studente riesce a ricostruire solo alcuni aspetti del proprio percorso di apprendimento e sviluppo professionale.

#### **Votazione 18-22**

Conoscenza e Comprensione: Lo studente riconosce e restituisce la maggior parte delle caratteristiche concettuali e riesce a fornirne una spiegazione relativamente coerente, sebbene con qualche imprecisione. I riferimenti teorici sono presenti ma non sempre in modo rigoroso.

Capacità di applicare conoscenza e comprensione: Lo studente è in grado di riconoscere un numero significativo di elementi e di fornire una spiegazione parziale, pur evidenziando alcune lacune nell'analisi.

Capacità comunicative e argomentative: Nella prova orale lo studente costruisce un'argomentazione di base, dotata di una struttura minima ma con alcune imprecisioni.

Capacità di apprendimento, di autovalutazione e di autoregolazione: Lo studente dimostra una consapevolezza di base del proprio percorso di apprendimento, riuscendo a tracciare collegamenti essenziali tra le esperienze formative, sebbene con alcune imprecisioni.

#### **Votazione 23-27**

Conoscenza e Comprensione: Lo studente dimostra una comprensione approfondita delle caratteristiche concettuali. Nell'elaborazione della prova scritta o nella discussione orale le spiegazioni risultano ben articolate e supportate da un uso adeguato dei riferimenti teorici.

Capacità di applicare conoscenza e comprensione: Lo studente individua con precisione gli elementi essenziali di una questione matematica. L'applicazione delle conoscenze avviene con un rigore metodologico non sempre solido.

Capacità comunicative e argomentative: Nella prova scritta lo studente sviluppa un'argomentazione coerente e ben organizzata, dimostrando una buona padronanza del linguaggio e una struttura logico-argomentativa solida. La comunicazione risulta chiara ed efficace.

Capacità di apprendimento, di autovalutazione e di autoregolazione: Lo studente analizza il proprio percorso di apprendimento in modo chiaro e strutturato, mettendo in evidenza relazioni significative tra le diverse tappe evolutive e dimostrando una buona capacità di riflessione critica.

#### **Votazione 28-30**

Conoscenza e Comprensione: Lo studente evidenzia una padronanza completa dei concetti, articolando connessioni complesse e fornendo spiegazioni esaustive. I riferimenti teorici sono utilizzati con pertinenza e rigore.

Capacità di applicare conoscenza e comprensione: Lo studente evidenzia una capacità avanzata di analisi di un problema, individuando e interpretando in modo esaustivo tutti gli elementi salienti. L'applicazione delle conoscenze avviene con rigore metodologico, supportato da un'argomentazione solida e articolata.

Capacità comunicative e argomentative: Nella prova scritta o orale lo studente elabora un'argomentazione solida e articolata, con un impianto logico rigoroso e un elevato livello di coerenza testuale. Il discorso è fluido e ben strutturato.

Capacità di apprendimento, di autovalutazione e di autoregolazione: Lo studente evidenzia una capacità avanzata di autoriflessione, elaborando un'analisi articolata e approfondita del proprio percorso di apprendimento e sviluppo professionale. Le connessioni tra esperienze formative e concetti teorici risultano chiare, coerenti e rigorose.

## Testi di riferimento

Appunti delle lezioni e materiale per le esercitazioni a cura del docente del corso.

Letture consigliate per integrare le lezioni:

1. **A. Guerraggio - S. Salsa, *Metodi matematici per l'economia e le scienze sociali*, G. Giappichelli Editore, Torino, 1997.**
2. **K. Sydsæter - P. Hammond - A. Seierstad - A. Strøm, *Further Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, Harlow, 2008.**

## Periodo di erogazione dell'insegnamento

Secondo semestre, secondo ciclo.

## Lingua di insegnamento

Italiano.

## Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÀ | CONSUMO E PRODUZIONE RESPONSABILI

---