UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Symplectic Geometry

2627-1-F4002Q036

Obiettivi

Una varietà simplettica è una varietà differenziabile dotata di una forma simplettica, ossia una 2-forma differenziale chiusa ovunque non-degenere (e ha pertanto dimensione pari). Per esempio, la sfera unitaria nello spazio euclideo 3-dimensionale possiede una struttura simplettica standard. Altri esempi 'canonici' sono i fibrati cotangenti di varietà differenziali e lo spazio proiettivo complesso. La Geometria Simplettica è la branca della Geometria che studia le proprietà delle varietà simplettiche.

L'interesse per la Geometria Simplettica origina dalla meccanica hamiltoniana, il che lega strettamente tale disciplina alla Fisica Matematica e alla Fisica Classica: su una varietà simplettica, a ogni funzione è associato naturalmente un campo vettoriale e quindi un sistema dinamico, e le equazioni di Hamilton sono le corrispondenti equazioni di flusso.

Oltre a essere una branca in intenso sviluppo della Geometria per il suo interesse intrinseco, la Geometria Simplettica è strettamente legata a diversi ambiti della Matematica moderna.

Per esempio, la Geometria Simplettica dei fibrati cotangenti è cruciale nello studio degli operatori pseudodifferenziali e degli operatori integrali di Fourier, ed è alla base dell'Analisi Semiclassica, mentre le proprietà simplettiche delle orbite coaggiunte di un gruppo di Lie (le orbite per l'azione coaggiunta sulla coalgebra di Lie) sono intimamente legate allo studio delle rappresentazioni irriducibili.

La Geometria Simplettica è inoltre un punto di vista indispensabile in Geometria differenziale (reale e complessa). Per esempio, il flusso geodetico di una varietà riemanniana è un caso particolare di sistema hamiltoniano e ammette la sua interpretazione più naturale nel linguaggio simplettico, e una classe importantissima di varietà complesse, cosiddette di Kaehler, è contraddistinta dall'esistenza di una struttura simplettica 'compaitibile' con la struttura complessa (le varietà proiettive sono una sottoclasse di quelle di Kaehler).

L'approccio simplettico ha giocato un ruolo cruciale negli sviluppi recenti più innovativi della Geometria Differenziale complessa.

Lo scopo del corso è discutere ed approfondire i concetti di base della Geometria Simplettica, a partire dagli aspetti locali per poi rivolgere l’attenzione alle proprietà globali di una varietà simplettica.

Una particolare enfasi verrà data allo studio delle sottovarietà lagrangiane e alle loro proprietà funtoriali, che sono una chiave importante per interpretare gli operatori integrali di Fourier.
Tempo permettendo, verranno inoltre approfonditi i concetti di azione hamiltoniana, di mappa momento e di riduzione simplettica; quest'ultima costruzione permette di costruire una nuova struttura simplettica 'quoziente' a partire da una varietà simplettica dotata di simmetrie.

I risultati di apprendimento attesi comprendono:

- Conoscenze: la conoscenza e la comprensione delle definizioni e degli enunciati fondamentali, nonché delle strategie di dimostrazione basilari utilizzate in geometria simplettica; la conoscenza e la comprensione di alcuni esempi chiave in cui si esplica la teoria.
- Capacità: la capacità di riconoscere il ruolo dei concetti e delle tecniche simplettiche in diversi ambiti della matematica pura (equazioni differenziali, geometria riemanniana, geometria complessa, teoria delle rappresentazioni) e nella modellizzazione di fenomeni fisici (fisica matematica); la capacità di applicare tale bagaglio concettuale alla costruzione di esempi concreti e alla risoluzione di esercizi; la capacità di esporre, comunicare e argomentare in modo chiaro e preciso sia i contenuti teorici del corso, sia le loro applicazioni a situazioni specifiche, anche inerenti ad altri ambiti.

Contenuti sintetici

Spazi vettoriali simplettici, varietà simplettiche, flussi Hamiltoniani e simplettomorfismi, forme canoniche delle strutture simplettiche, mappe momento e riduzioni simplettiche. Esempi notevoli di riduzioni simplettiche. Sottovarietà lagrangiane e loro proprietà funtoriali, funzioni di fase.

Programma esteso

· Algebra lineare simplettica.

· Struttura simplettica di un fibrato cotangente, equazioni di Hamilton, parentesi di Poisson.

· Varietà simplettiche, loro sottovarietà notevoli e rispettivi intorni.

· Isotopie e teoremi di Darboux e di Moser.

· sottovarietà lagrangiane e le loro proprietà funtoriali; il Teorema dell'intorno tubolare di Weinstein.

· Mappe momento e loro proprietà; riduzione simplettica.

· Strutture complesse e quasi-complesse compatibili, varietà di Kähler e varietà quasi-Kähler.

· Orbite coaggiunte e loro struttura simplettica intrinseca.

Prerequisiti

Sono presupposti: una buona familiarità con l'algebra lineare offerta nel biennio della laurea triennale di matematica, in quanto lo studio dell'algebra lineare simplettica ha un'importanza fondazionale per la parte restante del corso; le nozioni di base sulle varietà differenziale e sulle forme differenziali, come introdotte per esempio nei corsi di Geometria II e III. Verrà fatto comunque un breve riepilogo quando necessario.

Modalità didattica

Normalmente questo insegnamento viene impartito in modalità interamente erogativa in presenza, mediante lezioni frontali alla lavagna, che vengono anche videoregistrate e rese disponibili agli studenti sulla piattaforma *elearning*.

Materiale didattico

Le note delle lezioni scritte dal docente e quelle redatte dal Dott. Massimo Frigerio nell'a.a. 2018/19.

Ulteriori testi raccomandati:

V. Guillemin, S. Sternberg, Geometric Asymptotics, AMS 1990

V. Guillemin, S. Sternberg, Symplectic Techniques in Physics, Cambridge University Press

D. McDuff, D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology, Clarendon Press, Oxford

Letture consigliate:

V. Guillemin, S. Sternberg, Semiclassical Analysis, International Press

J. J. Duistermaat, Fourier Integral Operators, Birkhäuser

Periodo di erogazione dell'insegnamento

I semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame consiste di due prove scritte, seguite da una discussione orale delle stesse. Ciascuna delle prove verterà su una parte del corso (I e II), e sarà finalizzata alla valutazione della conoscenza, della comprensione e delle capacità che costituiscono gli obiettivi formativi dell'insegnamento. L'esatta suddivisione in argomenti tra le due prove verrà comunicata durante il corso con largo anticipo rispetto allo svolgimento delle stesse. Ogni prova consiste di una combinazione flessibile di quesiti teorici (definizioni, enunciati, dimostrazioni) e di quesiti di carattere più pratico (risoluzione di esercizi, costruzione di esempi o controesempi). Ogni prova verrà valutata indipendentemente e concorrerà in egual misura alla determinazione del voto complessivo finale; al fine del superamento dell'esame entrambe le prove dovranno essere sufficienti.

Le due prove scritte possono essere sostenute in appelli differenti. In ogni appello sarà possibile a iscriversi a entrambe le prove scritte, ma solo alla seconda è abbinata la registrazione del voto. La data della discussione orale degli scritti dopo la seconda prova scritta verrà annunciata dopo la correzione della stessa.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ