UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Algebraic and Complex Geometry

2627-1-F4002Q009

Obiettivi

Il corso si propone di introdurre lo studente ai concetti e ai metodi fondamentali della Geometria Algebrica classica, fornendo gli strumenti per comprendere il profondo legame tra le proprietà geometriche delle varietà e le proprietà algebriche degli anelli associati.
Più in dettaglio gli obiettivi sono:

(1) **Conoscenza e capacità di comprensione:** gli studenti al termine del corso avranno acquisito: la struttura delle varietà affini e proiettive; la corrispondenza algebra-geometria basta sul Nullstellensatz di Hilbert; il concetto di trasformazione birazionale; la nozione di dimensione per una varietà algebrica.
(2) **Capacità di applicare conoscenza e comprensione**: gli studenti saranno in grado di tradurre problemi geometrici nel linguaggio degli ideali e viceversa; fare uno studio delle proprietà locali di una varietà e l'analisi delle singolarità.
(3) **Autonomia di giudizio**: L'insegnamento mira a sviluppare la capacità di analizzare criticamente e produrre giudizi autonomi sulla base degli strumenti appressi.
(4) **Abilità comunicative**: Gli strumenti appresi consentiranno agli sudenti di formulare argomenti chiari e rigorosi per descrivere, sia oralmente che per iscritto, proprietà di varietà algebriche.
(5) **Capacità di apprendimento**: L'insegnamento fornirà gli strumenti teorici e metodologici per affrontare in autonomia lo studio di sviluppi avanzati della Geometria Algebrica.

Contenuti sintetici

- Curve algebriche piane.
- Varietà affini.
- Varietà proiettive.
- Varietà quasiproiettive.
- Singolarità e dimensione.

- Struttura delle mappe birazionali.

Programma esteso

- Curve algebriche piane: curve affini e curve proiettive, curve razionali, punti singolari, classificazione delle coniche proiettive.
- Varietà affini: sottosinsiemi chiusi di uno spazio affine, topologia di Zariski, irriducibilità, Nullstellensatz (Teorema degli zeri di Hilbert), funzioni polinomiali e anello delle coordinate, mappe polinomiali, varietà affini, isomorfismi tra varietà affini, funzioni e mappe razionali.
- Varietà proiettive: sottoinsiemi chiusi di uno spazio proiettivo, topologia di Zariski, versione proiettiva del Nullstellensatz, varietà proiettive, funzioni razionali e regolari, mappe rezionali e morfismi, mappe birazionali, varietà razionali.
- Varietà quasiproiettive: prodotto di varietà, mappe finite, Teorema di Normalizzazione di Noether.
- Singolarità e dimensione: anello locale in un punto, spazio tangente, punti singolari, dimensione, varietà non singolari.
- Struttura delle mappe birazionali: blowup e sottovarietà eccezionali, varietà normali e normalizzazione.
- Varietà complesse e introduzione al principio GAGA: Varietà algebriche sul campo complesso e topologia euclidea. Confronto tra topologia di Zariski e topologia classica. Cenni alle varietà analitiche, Teorema di Chow e corrispondenza tra varietà algebriche proiettive e varietà complesse compatte.

Prerequisiti

Nozioni di base algebra e algebra lineare, topologia generale e calcolo differenziale in più variabili.

Modalità didattica

L' insegnamento prevede lezioni frontali (56 ore pari a 8 CFU) in presenza.
L'attività didattica è svolta prevalentemente in modalità erogativa, nelle lezioni vengono presentati definizioni, risultati e teoremi rilevanti e si forniscono esempi e analisi di problemi dove vengono utilizzate le nozioni introdotte. Al termine di ogni argomento svolto a lezione, verranno proposti alcuni esercizi che saranno pubblicati alla pagina e-learning del corso. La loro risoluzione viene lasciata agli studenti e potrà essere discussa in aula a richiesta degli studenti o durante i ricevimenti.
Il corso è previsto in lingua italiana ma potrebbe essere tenuto in lingua inglese in presenza di studenti stranieri.

Materiale didattico

Testi consigliati:

- Miles Reid, "Undergraduate Algebraic Geometry",
  London Mathematical Society Student texts 12

- Igor R. Shafarievich, "Basic Algebraic Geometry 1. Varieties in Projective Space",
  Springer

- Joe Harris, "Algebraic Geometry. A first course",
  Graduate Texts in Matematics. Springer

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame consiste di una prova orale.
Non sono previste prove in itinere o parziali.
La prova orale si divide in due parti:
-nella prima vengono proposti quesiti di carattere teorico (definizioni, enunciati e dimostrazioni dei risultati discussi a lezione),
-nella seconda vengono proposti quesiti di applicazione della teoria (risoluzione di esercizi simili a quelli proposti durante le lezioni, costruzione di esempi o controesempi).
Le due parti concorrono in egual misura alla determinazione del punteggio finale valutato in trentesimi. Nella prima parte verranno valutate la conoscenza e la comprensione dei concetti presentati nel corso e dei risultati teorici dimostrati in aula, la capacità di organizzare un' esposizione efficace, rigorosa e coerente. Nella seconda parte verranno valutate la padronanza e l'autonomia nell'affrontare lo svolgimento degli esercizi, l'esattezza delle risposte e la proprietà del linguaggio matematico utilizzato.
L'esame è superato se si ottiene una valutazione di almeno 18/30.

Sono previsti 6 appelli d'esame (gennaio, febbraio, aprile, giugno, luglio e settembre).

Orario di ricevimento

Su appuntamento.

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ