UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Geometric Group Theory

2627-1-F4002Q013

Obiettivi

L'obiettivo del corso è di studiare grafi particolari chiamati alberi e i gruppi che agiscono su di essi, con attenzione alla teoria sviluppata da Hyman Bass e Jean-Pierre Serre negli anni '70. Questa teoria è fondamentale nella teoria geometrica dei gruppi, che mira a recuperare proprietà dei gruppi attraverso la loro azione su spazi topologici. Il corso coprirà anche applicazioni come le terminazioni di gruppi, la caratterizzazione dei sottogruppi di gruppi liberi tramite grafi di Stallings, e la frontiera di un albero.

In particolare, gli obiettivi formativi descritti nei termini dei **Descrittori di Dublino**, saranno:

1. Conoscenza e capacità di comprensione (**knowledge and understanding**): Lo studente acquisirà una conoscenza chiara e sistematica dei principali concetti della teoria di Bass-Serre sugli alberi. Conoscerà il linguaggio, le definizioni e gli enunciati dei risultati fondamentali della teoria di Bass-Serre (come grafi, alberi e costruzioni di prodotti di gruppi) e comprendere i concetti di della teoria geometrica dei gruppi e le loro applicazioni, con un occhio alla continuazione dello studio.
2. Capacità di applicare conoscenza e comprensione (**applying knowledge and understanding**): Lo studente sarà in grado di applicare le principali tecniche dimostrative della teoria di Bass-Serre per analizzare azioni di gruppi che agiscano su alberi e potrà utilizzare le nozioni teoriche per la risoluzione di esercizi avanzati (*problem solving*).
3. Autonomia di giudizio (**making judgements**): Lo studente apprenderà a valutare criticamente le diverse tecniche dimostrative e le loro applicazioni e svilupperà un approccio critico e autonomo nello studio della teoria geometrica dei gruppi.
4. Abilità comunicative (**communication skills**): Lo studente saprà comunicare in modo chiaro ed efficace i concetti e le tecniche della teoria di Bass-Serre, utilizzando correttamente il linguaggio matematico per poter presentare e discutere i risultati teorici e le applicazioni in un contesto accademico.
5. Capacità di apprendere (**learning skills**): Lo studente svilupperà la capacità di aggiornarsi autonomamente sui temi e sviluppi nella teoria geometrica dei gruppi, di interpretare criticamente la letteratura scientifica e di integrare nuove conoscenze nella propria pratica professionale o di ricerca.

Il corso può essere tenuto in inglese o italiano. Per fini didattici e trasversali sarebbe preferibile la lingua inglese,

ma comunque la lingua verrà discussa e decisa di persona nelle prime lezioni del corso.

Contenuti sintetici

- Nozioni di base di teoria dei grafi e alberi.
- Costruzione di grafi di Cayley a partire da gruppi.
- Costruzione di gruppi liberi, prodotti liberi e generalizzazioni.
- Caratterizzazione di gruppi che agiscano su alberi.

Programma esteso

- Grafi, cammini, connettività, alberi
- Azioni di gruppi su grafi, grafi di Cayley, grafi quoziente
- Gruppi liberi, lemma del diamante e del ping-pong
- Prodotti liberi e amalgamati, estensioni HNN e loro realizzazione tramite azioni su alberi
- Grafi di gruppi, gruppo fondamentale di un grafo di gruppi
- Teorema di caratterizzazione per gruppi che agiscono su alberi (teorema fondamentale della teoria di Bass-Serre)
- Teorema di Kurosh per sottogruppi di prodotti liberi
- Possibili argomenti più avanzati a fine corso (terminazioni di gruppi, grafi di Stallings, frontiera di un albero, ecc.)

Prerequisiti

Algebra I, Geometria I.

Modalità didattica

56 ore di lezione svolte in modalità erogativa, in presenza (8 cfu)

Materiale didattico

- O. Bogopolski, Introduction to Group Theory, EMS Textbooks in Mathematics, 2008.
- J. Meier, Groups, Graphs and Trees, London Mathematical Society, Student Texts, 73, CUP, 2008.
- J-P. Serre, Trees, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- W. Dicks, M. Dunwoody. Groups acting on graphs. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 17. Cambridge University Press, Cambridge, 1989
- G. Baumslag, Topics in combinatorial group theory. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993

Periodo di erogazione dell'insegnamento

1° semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

La prova finale d'esame consiste in un colloquio orale svolto in due parti:

(1) La prima parte è una presentazione di 20 minuti su un'applicazione, approfondimento o un tema relazionato della teoria di Bass-Serre concordato con il docente. La presentazione contribuisce 20% del voto finale.

(2) La seconda parte è discussione orale tramite domande su argomenti svolti a lezione contenuti del corso da cui si valuta le competenze acquisite dallo studente nello spiegare e applicare la teoria di Bass-Serre. La discussione su argomenti svolti contribuisce 80% del voto finale.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ