UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Numerical Methods for Partial Differential Equations

2627-1-F4002Q021

Obiettivi

In coerenza con gli obiettivi formativi del Corso di Studio, in questo insegnamento vengono fornite agli studenti le conoscenze riguardanti la teoria matematica rigorosa del Metodo degli Elementi Finiti per l'approssimazione delle equazioni differenziali ellittiche del secondo ordine.

Verranno inoltre sviluppate le competenze per affrontare, in corsi successivi più avanzati o con uno studio autonomo, lo studio del metodo degli elementi finiti per equazioni alle derivate parziali più generali.

L'implementazione del metodo avverrà utilizzando l'ambiente di calcolo MATLAB, fornito dall'Ateneo con licenza individuale per tutti gli studenti. Alla fine del corso, con i codici sviluppati lo studente avrà acquisito l'abilità risolvere vari problemi di tipo modellistico legati all'approssimazione di equazioni alle derivate parziali.

Contenuti sintetici

- Metodo alle Differenze Finite
- Richiami sugli spazi di Sobolev
- Lemma di Lax-Milgram
- Metodo di Galerkin
- Lemma di Cea
- Elementi Finiti lineari
- Elementi Finiti di Lagrange di ordine k
- Elementi Finiti nonconformi
- Elementi Finiti con regolaritá piú alta
- Stime dell'errore in norma energia
- Lemma di Bramble-Hilbert
- Argomento di dualità di Aubin-Nitsche per la stima dell'errore in norma L2
- Crimini variazionali e lemmi di Strang

- il problema di Helmholtz
- stabilizzazione di tipo SUPG
- algoritmi adattativi e stimatore dell'errore residuale
- convergenza degli algoritmi adattativi usando la marking strategy di Dörfler
- metodi DG: derivazione e stime dell'errore
- metodi iterativi per la risoluzione dei sistemi lineari derivanti da una discretizzazione ad elementi finiti

Programma esteso

- **Concetti di base.** Presentazione nel caso semplice monodimensionale delle idee e delle tecniche che verranno sviluppate nel corso.
- **Spazi di Sobolev.** Sono l'ambiente funzionale naturale per studiare matematicamente il metodo degli elementi finiti.
- **Formulazione variazionale di problemi ai limiti ellittici.** Inquadramento funzionale astratto delle equazioni alle derivate parziali che saranno studiate nel corso.
- **Costruzione di spazi di elementi finiti.** Saranno presentati gli elementi finiti piu' importanti.
- **Teoria dell'approssimazione polinomiale negli spazi di Sobolev.** Questa è la parte centrale del corso, dove si studia come gli elementi finiti (che sono essenzialmente funzioni continue e polinomiali a tratti) approssimano le funzioni degli spazi di Sobolev.
- **Analisi del Metodo agli Elementi Finiti.** Analisi di diversi tipi di Elementi Finiti (DG, non conformi, H^1 conformi, H^2 conformi) per l'approssimazione di soluzioni a equazioni differenziali alle derivate parziali di vario tipo (problema di Helmholtz, problemi di diffusione-trasporto-reazione, ...).
- **Stimatore dell'errore residuale e algoritmi adattativi.** Analisi dello stimatore dell'errore residuale, affidabilitá, efficienza, algoritmi adattativi e loro convergenza.
- **Metodi iterativi per la risoluzione dei sistemi lineari derivanti da una discretizzazione ad elementi finiti.** Metodi multigrid, metodo del gradiente coniugato e precondizionamento.

Prerequisiti

Gli insegnamenti di matematica di base del corso di Laurea Triennale in Matematica. E' altamenente suggerito aver seguito il corso *Analisi Superiore* del 1° semestre della Laurea Magistrale.

Modalità didattica

Lezioni (6 CFU), esercitazioni alla lavagna e al calcolatore (2 CFU).

Materiale didattico

I testi di riferimento consigliati sono S. C. Brenner e L. R. Scott: The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer 2008; A. Ern e J-L. Guermond: Finite Elements I: Approximation and Interpolation, Springer 2021; D. Braess: Finite Elements, Cambridge University Press 2010

Saranno inoltre disponibili note a cure del docente su argomenti specifici.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

2° semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame è diviso in due parti:

- scrittura e presentazione di un progetto;
- esame orale.

Il voto è in trentesimi. L'esame si considera superato solo in entrambe le parti viene conseguita la sufficienza (18/30).

Il progetto valuta l'abilità dello studente a risolvere problemi utilizzando gli strumenti teorici e i codici sviluppati durante il corso. Il progetto consiste nell'implementare l'approssimazione di un problema legato alle equazioni alle derivate parziali. Viene incoraggiato il lavoro di gruppo (max 3 studenti) e premiata la qualità dell'esposizione.

Nella prova orale (individuale) viene valutata la conoscenza delle definizioni, dei risultati e delle dimostrazioni presentati in aula, con particolare rilievo riguardo al rigore delle argomentazioni. Verranno inoltre valutate la competenza e la padronanza della materia richiedendo di individuare gli aspetti essenziali degli argomenti esposti.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ