UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Stochastic Processes

2627-1-F4002Q029

Obiettivi

1. Conoscenza e capacità di comprensione
   Il corso fornisce agli studenti una conoscenza avanzata dei concetti fondamentali, delle definizioni e dei principali risultati della teoria dei processi stocastici in tempo discreto. Particolare attenzione sarà dedicata alla teoria delle martingale, evidenziandone il ruolo centrale nella probabilità moderna e nelle sue applicazioni. Gli studenti approfondiranno la comprensione delle strutture probabilistiche essenziali e acquisiranno familiarità con il formalismo matematico avanzato utilizzato nel settore.

2. Conoscenza e capacità di comprensione applicate
   Gli studenti svilupperanno la capacità di applicare gli strumenti teorici e le tecniche probabilistiche apprese per risolvere esercizi, analizzare modelli e affrontare problemi legati ai processi stocastici in tempo discreto. Saranno in grado di applicare in modo rigoroso i principali risultati teorici, come i teoremi di arresto opzionale, i teoremi di convergenza per le martingale e altri principi fondamentali, a problemi concreti di teoria della probabilità e discipline affini.

3. Autonomia di giudizio
   Il corso promuoverà la capacità di ragionamento critico e autonomo degli studenti nell'ambito matematico. Gli studenti impareranno a valutare la correttezza degli argomenti, a selezionare gli strumenti matematici più idonei nella risoluzione dei problemi e a esaminare criticamente le ipotesi e i limiti dei risultati all'interno della teoria dei processi stocastici.

4. Abilità comunicative
   Gli studenti miglioreranno la loro capacità di comunicare in modo chiaro e rigoroso concetti matematici avanzati, sia oralmente che in forma scritta, utilizzando il linguaggio e il formalismo propri della teoria della probabilità. Saranno incoraggiati a presentare dimostrazioni, discutere risultati teorici e spiegare l'applicazione dei concetti principali a diversi contesti nell'ambito dei processi stocastici.

5. Capacità di apprendimento
   Al termine del corso, gli studenti avranno rafforzato la capacità di studio autonomo e di acquisizione di

nuove conoscenze nell’ambito della probabilità avanzata e dei processi stocastici. Saranno preparati per approfondire ulteriormente tali argomenti attraverso corsi specialistici, attività di ricerca o applicazioni di modelli stocastici in matematica, finanza o altre discipline quantitative.

Contenuti sintetici

Complementi di probabilità, Legge e speranza condizionale. Martingale a tempo discreto. Mercati finanziari e Martingale. Esempi e applicazioni.

Programma esteso

- Complementi di Probabilità: Funzione caratteristica, unicità e connessione con la convergenza debole. Vettori gaussiani. Criteri di compattezza rispetto alla convergenza in legge.
- Legge e speranza condizionale. Definizioni e proprietà. Esistenza della speranza condizionale di una variabile aleatoria rispetto a una sigma algebra. Proprietà fondamentali: proprietà della torre, disuguaglianza di Jensen, lemma del congelamento (freezing). Teoremi di passaggio al limite.
- Martingale a tempo discreto. Definizione ed esempi (somme di v.a. indipendenti centrate, prodotto di v.a. indipendenti e di media 1, martingale chiuse). Integrale di un processo prevedibile. Martingale arrestate. Teorema di arresto opzionale. Applicazioni: tempo di primo passaggio di una passeggiata aleatoria su Z; problema della rovina del giocatore. Lemma sugli attraversamenti (upcrossing). Convergenza quasi certa delle martingale limitate in L^1. Martingale limitate in L^2. Uniforme integrabilità e convergenza in L^1. Dimostrazione della legge forte dei grandi numeri. Disuguaglianza massimale. Disuguaglianza di Doob, convergenza in L^p. Esempi: processi di ramificazione di Galton-Watson. Applicazioni alla convergenza di somme di variabili alaeatorie
- Mercati finanziari a tempo discreto. Arbitraggio e misura martingala equivalente

Prerequisiti

Sono necessarie le nozioni del calcolo differenziale e integrale per funzioni di una e più variabili reali e quelle del calcolo delle probabilità con teoria della misura. È utile conoscere definizioni e prime proprietà degli spazi L^p e degli spazi di Hilbert.

Modalità didattica

Si utilizza un approccio didattico ibrido che combina didattica erogativa (DE) e didattica interattiva (DI). Nella DE si fornisce la conoscenza di definizioni, risultati ed esempi rilevanti, il cui scopo è di fornire competenze e abilità necessarie per utilizzare tali nozioni nella risoluzione di esercizi e nell'analisi di problemi (anche legati ad applicazioni extra-matematiche). La DI prevede interventi attivi degli studenti tramite risposte a domande e problemi posti dal docente, brevi interventi, discussioni collettive e solitamente viene svolta nella seconda parte della lezione. Non è possibile stabilire precisamente a priori il numero di ore dedicate alla DE e alla DI, poiché le modalità si intrecciano in modo dinamico per adattarsi alle esigenze del corso e favorire un apprendimento partecipativo e integrato, combinando teoria e pratica.

Materiale didattico

- Jean Jacod & Philip Protter: Probability essentials
- D. Williams, Probability with Martingales, Cambridge University Press (1991).
- Dispense e appunti dei docenti (disponibili sulla piattaforma di e-learning).
- Testi e soluzioni dei temi delle prova scritta degli anni precedenti (disponibili sulla piattaforma di e-learning).
- Elenco delle dimostrazioni che possono essere richieste durante la prova orale (disponibili sulla piattaforma di e-learning).

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

Esame scritto e orale. Voto in trentesimi. Non vengono effettuate prove in itinere

Nella prova scritta, che contiene ESERCIZI, PROBLEMI e DOMANDE DI TEORIA a risposta aperta, viene valutata la *abilità* operativa di risolvere esercizi utilizzando le conoscenze fornite nel corso. La prova scritta viene valutata con un voto in trentesimi. È necessario ottenere una valutazione di almeno 16/30 nella prova scritta per accedere alla prova orale, che consta in un COLLOQUIO DI DISCUSSIONE SULLO SCRITTO E SUGLI ARGOMENTI SVOLTI A LEZIONE. Nell'orale viene valutata se lo studente ha acquisito le *competenze* necessarie a presentare una selezione delle dimostrazioni svolte in aula, e, soprattutto, la *conoscenza* critica e operativa delle definizioni e dei risultati del corso, anche mediante l'illustrazione di esempi e controesempi. La valutazione finale risulterà dalla combinazione ragionata tra la valutazione della prova scritta e quella della prova orale. L'esame è superato se il voto è almeno 18/30.

Ci saranno 6 appelli d'esame

Orario di ricevimento

Su appuntamento.

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ