

I modelli nucleari

I modelli nucleari

Per i nuclei **non esiste** un unico modello nucleare capace di spiegare tutte le sue proprietà. I motivi sono principalmente:

- non esiste un corpo centrale di grande massa che rappresenti il centro di attrazione
- non si conosce la struttura del potenziale di interazione nucleare

Adottiamo il seguente approccio: scegliamo **una teoria volutamente semplificata** che descriva almeno **alcune proprietà nucleari** e la miglioriamo aggiungendo ulteriori termini.

→ Costruiamo quindi un modello nucleare che deve **tenere conto delle proprietà nucleari precedentemente misurate e prevedere nuove proprietà** che possono essere misurate in nuovi esperimenti.

Principali modelli:

- Modello a gas di Fermi (nucleo=gas di Fermi)
 - nucleoni: particelle libere entro un volume $V = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$
 - interazione: buca di potenziale che confina i nucleoni entro un raggio $R = r_0 A^{1/3}$
- **Modello a goccia di liquido**
- **Modello a strati (Shell)**
- Interacting Boson Model (IBM): i nucleoni (protoni o neutroni) si accoppiano, agendo essenzialmente come una singola particella con proprietà di bosoni
- Modelli collettivi

Modello a goccia e formula semi-empirica di massa

Il modello a goccia è stato ipotizzato per spiegare la perdita di massa durante una fissione nucleare (difetto di massa).

L'assorbimento di un neutrone da parte di un nucleo causa un eccesso di energia che determina un moto oscillatorio che causa un allungamento del nucleo finché questo non si rompe (fissione nucleare).

Analogia con goccia di liquido:

Nucleo	Goccia di liquido
<ul style="list-style-type: none">• Densità nucleare circa uguale per tutti i nuclidi• Energia di legame \sim proporzionale alla massa A	<ul style="list-style-type: none">• Densità costante per tutte le gocce• Calore latente proporzionale alla massa

Costruiamo una formula per le masse nucleari sulla base di questa analogia (e di altri effetti):

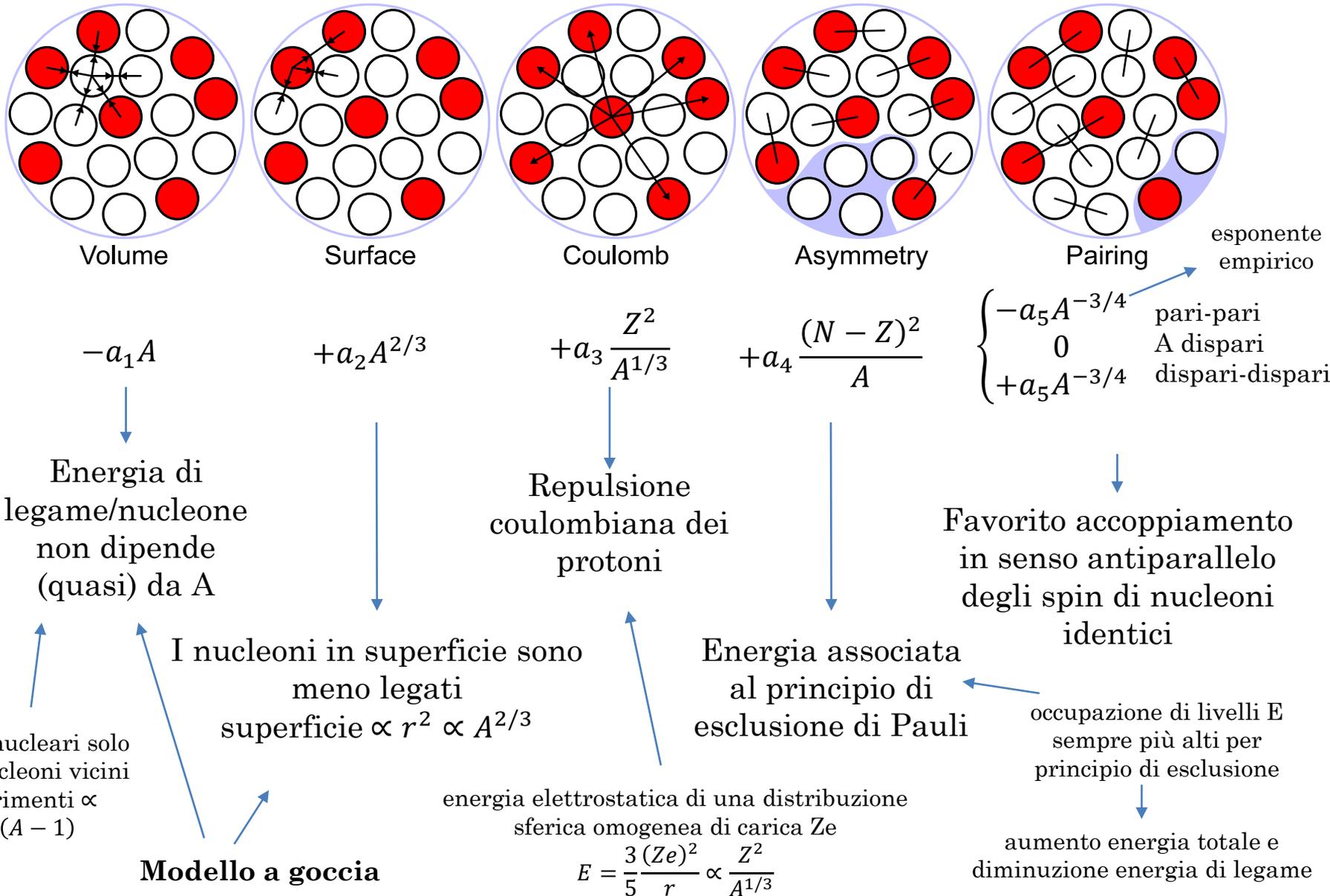
Massa nucleare

$$M = NM_n + ZM_p + \dots$$

Massa neutrone
939,6 MeV/c²

Massa protone
938,3 MeV/c²

Formula semi-empirica di massa



esponente empirico

$$\begin{cases} -a_5 A^{-3/4} & \text{pari-pari} \\ 0 & \text{A dispari} \\ +a_5 A^{-3/4} & \text{dispari-dispari} \end{cases}$$

Favorito accoppiamento in senso antiparallelo degli spin di nucleoni identici

occupazione di livelli E sempre più alti per principio di esclusione

aumento energia totale e diminuzione energia di legame

Formula semi-empirica di massa

Riassumendo abbiamo ottenuto una **formula semi-empirica** (formula di Weizsäcker) per le masse nucleari:

$$M = NM_n + ZM_p - a_1A + a_2A^{2/3} + a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_4 \frac{(N - Z)^2}{A} + \begin{cases} -a_5A^{-3/4} \\ 0 \\ +a_5A^{-3/4} \end{cases}$$

Energia di legame

Interpolando i dati sperimentali:

$$a_1 = 15,5 \text{ MeV}$$

$$a_4 = 23 \text{ MeV}$$

$$a_2 = 16,8 \text{ MeV}$$

$$a_5 = 34 \text{ MeV}$$

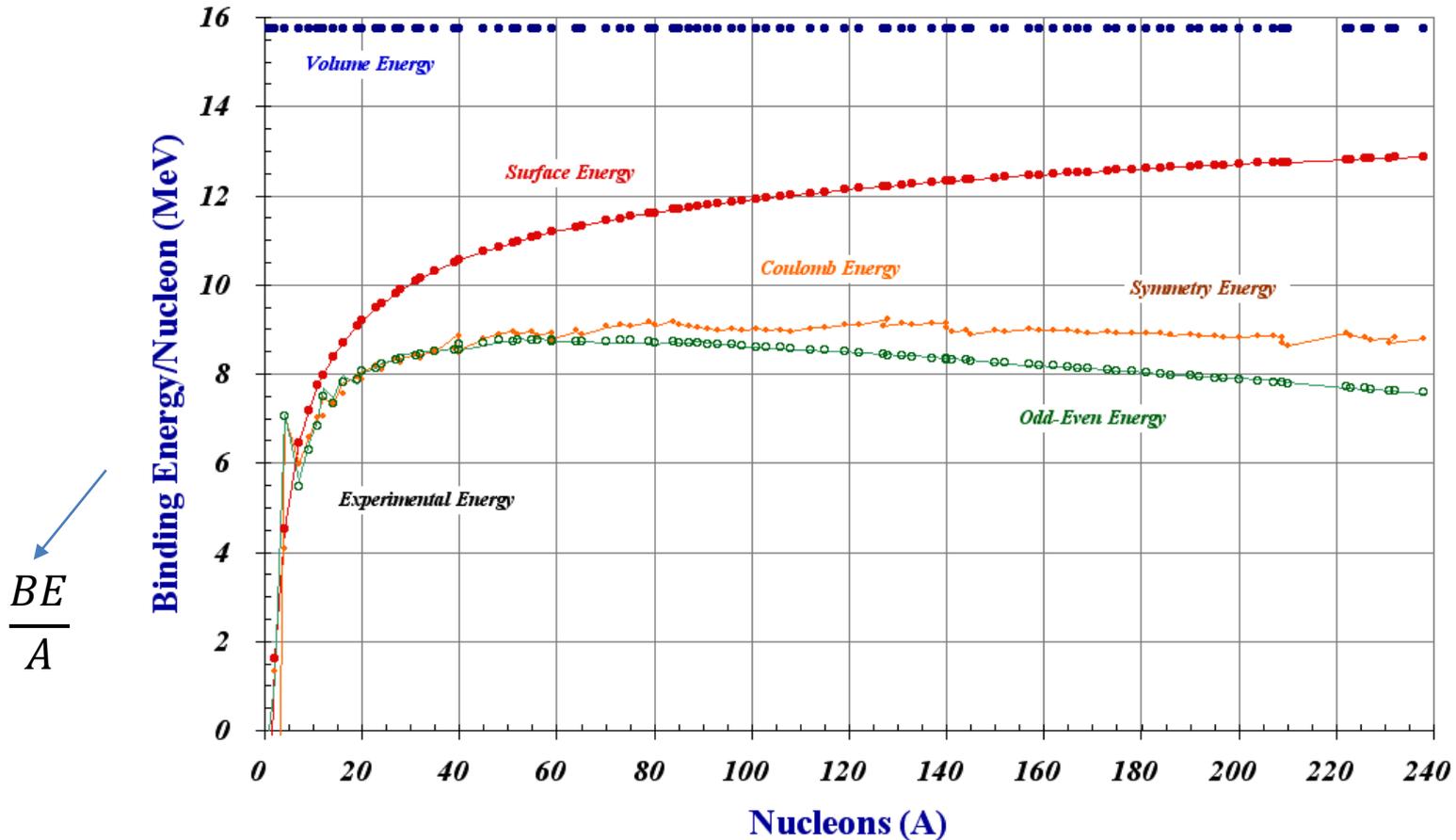
$$a_3 = 0,72 \text{ MeV}$$

- Precisione della formula $\sim 2 \text{ MeV}$
 - forti deviazioni in corrispondenza della chiusura degli 'strati' nucleari
- E' possibile stimare r_0
 - $r_0 = 1,237 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ \rightarrow ottimo accordo con i dati sperimentali!

Energia di legame (Binding Energy)

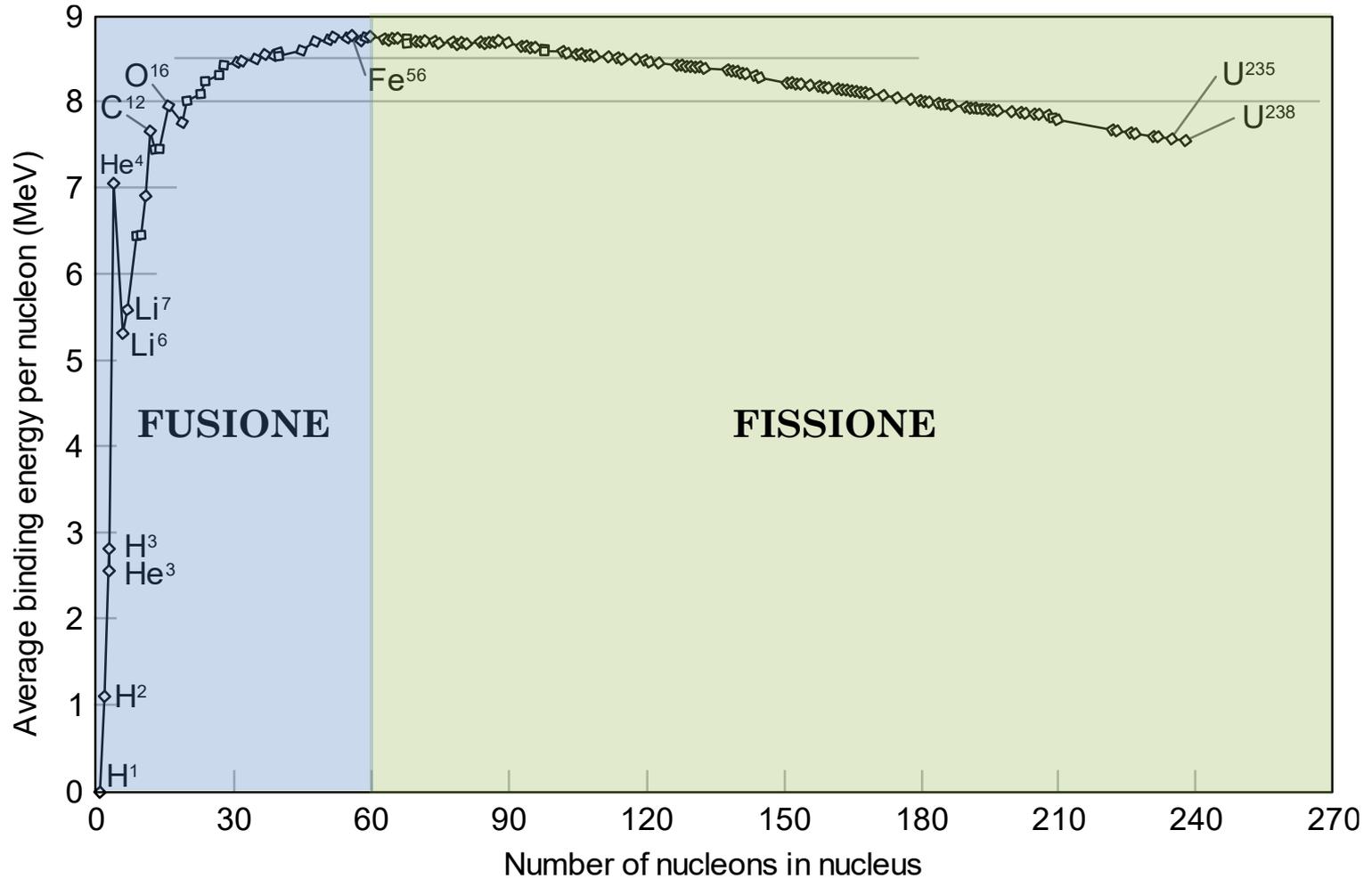
$$BE = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_4 \frac{(N - Z)^2}{A} + \begin{cases} -a_5 A^{-3/4} \\ 0 \\ +a_5 A^{-3/4} \end{cases}$$

$$M = NM_n + ZM_p - BE$$



Energia di legame (Binding energy)

Ricordiamo che sperimentalmente:



Formula semi-empirica di massa

Per A costante la formula semi-empirica per le masse nucleari è una parabola per M vs Z

$$M(Z, A) = NM_n + ZM_p - a_1A + a_2A^{2/3} + a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_4 \frac{(N - Z)^2}{A}$$

trascuriamo per ora il termine di pairing (A dispari)

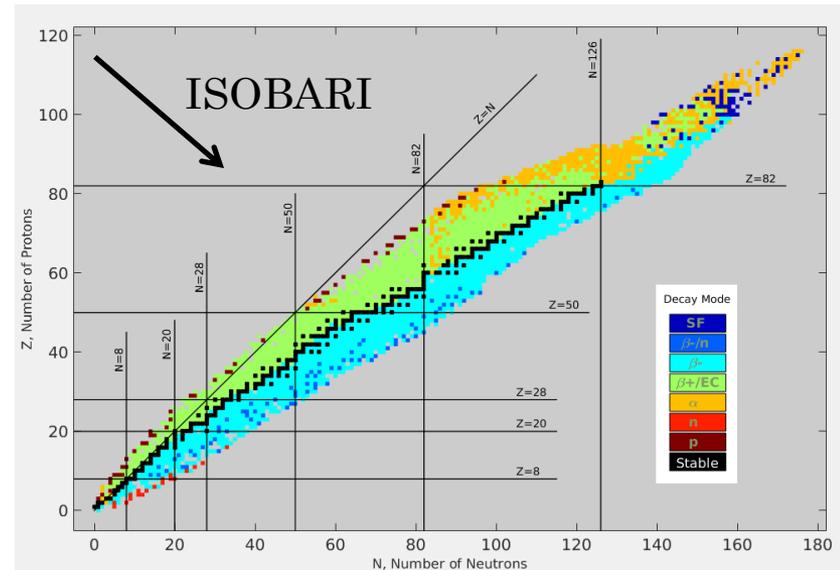
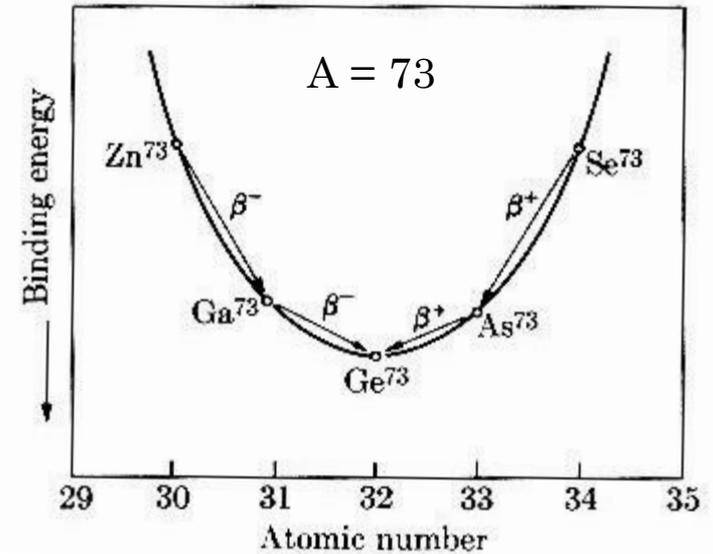
Il minimo della parabola $\frac{\partial M}{\partial Z} = 0$ si trova in:

$$Z_{min} = \frac{[M_N - M_p] + a_3A^{-1/3} + 4a_4}{2a_3A^{-1/3} + 8a_4A^{-1}} \approx \frac{A}{2 + 0,015A^{2/3}}$$

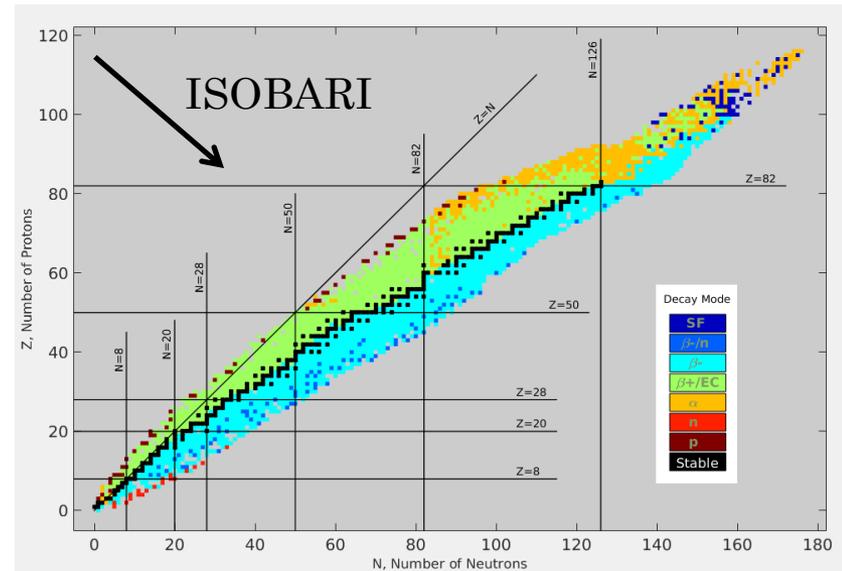
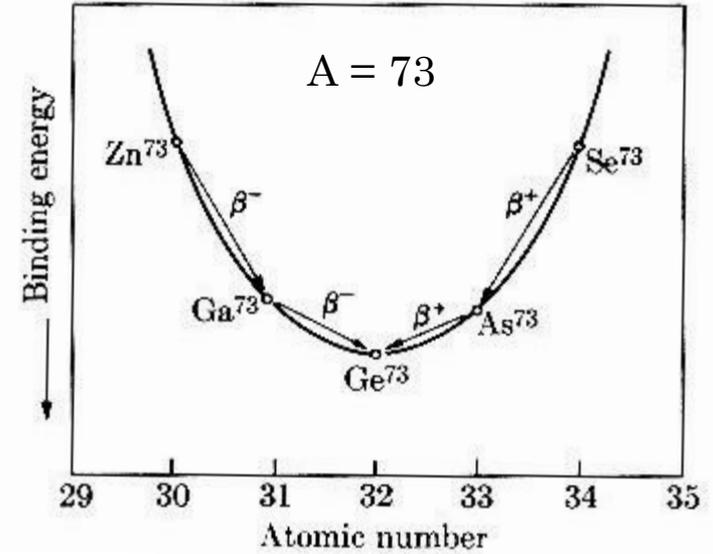
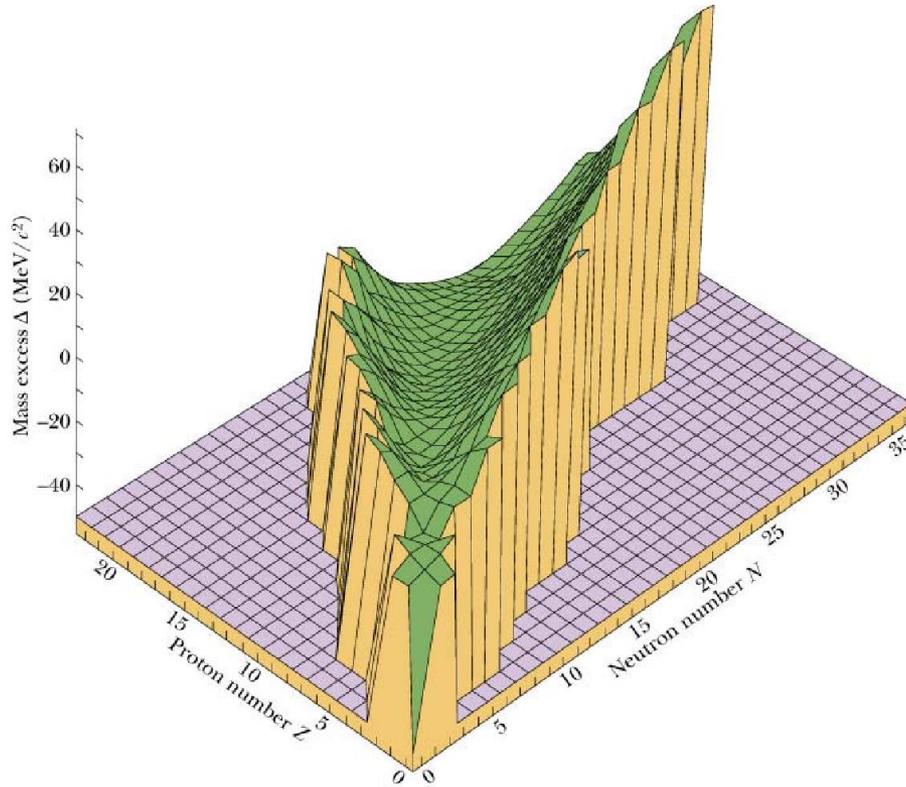
Inserendo i valori numerici di a_3, a_4

Stima della fascia di stabilità β nel piano N-Z

- Fissato A, un nuclide è β -stabile se ha un valore di Z corrispondente ad un minimo per M
- A piccolo, $Z_{min} \approx A/2$; A grande, $Z_{min} < A/2$
- Per nuclei pesanti $Z/A \approx 0,4$



Formula semi-empirica di massa

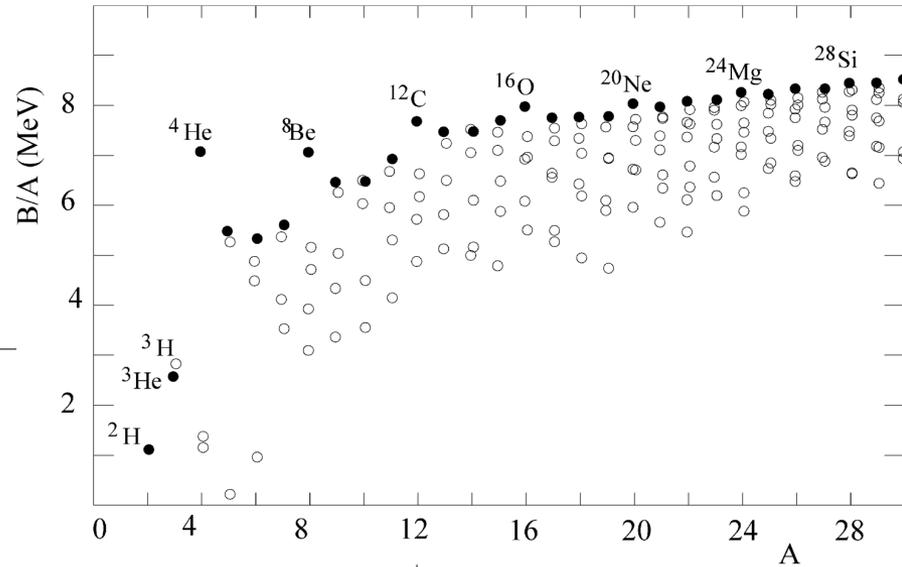
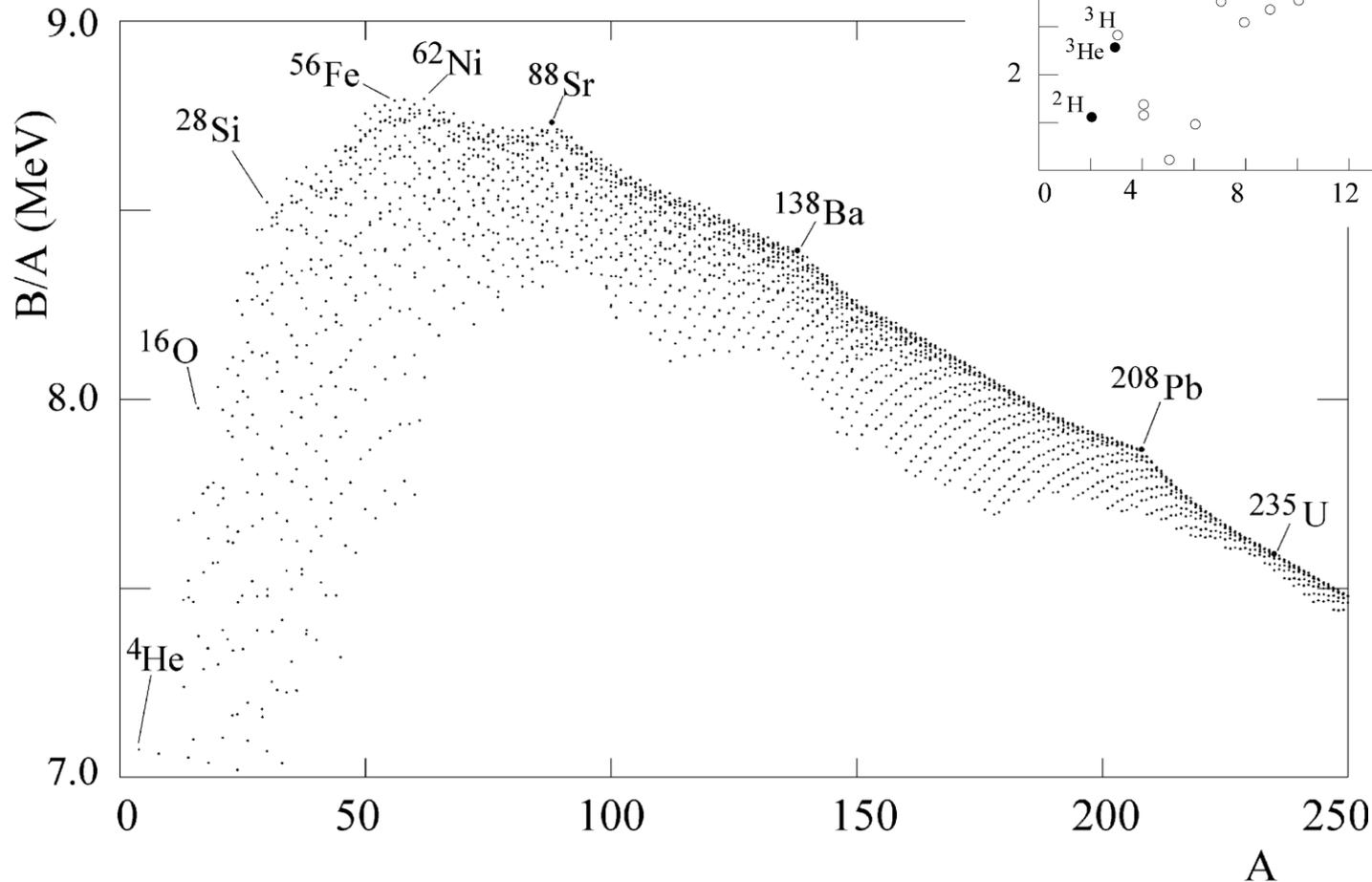


App. 15

Es. 4

Formula semi-empirica di massa

Se consideriamo tutti gli isotopi l'energia di legame per nucleone ha un andamento decisamente più complicato...



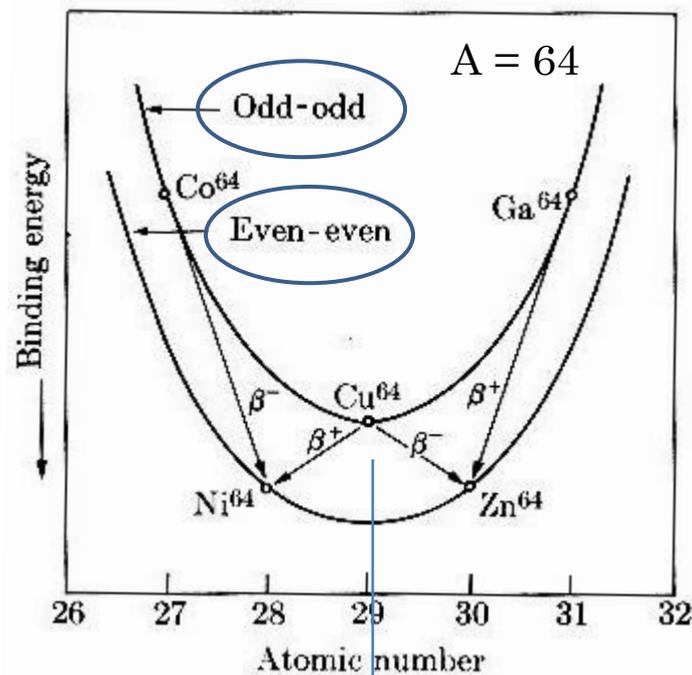
Formula semi-empirica di massa

Torniamo ora a considerare il termine di pairing.

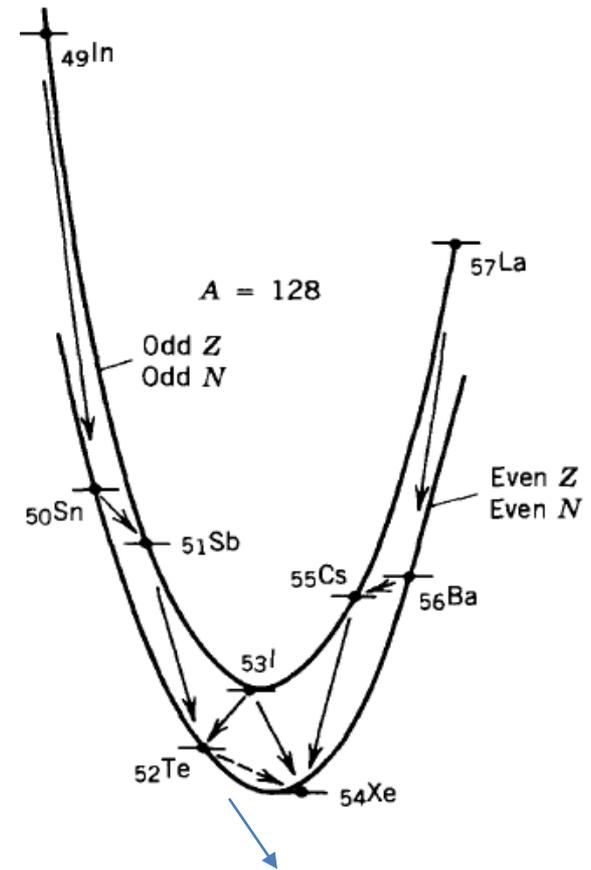
$$\begin{cases} -a_5 A^{-3/4} & \rightarrow \text{pari-pari} \\ +a_5 A^{-3/4} & \rightarrow \text{dispari-dispari} \end{cases}$$



Per A pari il termine di pairing produce 2 parabole!



Alcuni isotopi possono decadere sia β^+ che β^-



Decadimento β doppio

Modello a strati (Shell model) e i numeri magici

L'obiettivo auspicabile è derivare dalla natura delle forze nucleari le funzioni d'onda dei singoli nucleoni e dedurre le proprietà generali dei nuclidi in analogia con il caso atomico

Il modello a goccia non dice nulla sul moto dei singoli nucleoni all'interno del nucleo.

L'analogia con il caso atomico è suggerita dall'esistenza dei '**numeri magici**'

2 – 8 – 20 – 28 – 50 – 82 – 126

**Quando N e/o Z = numero magico
Il nucleo è particolarmente stabile!!**



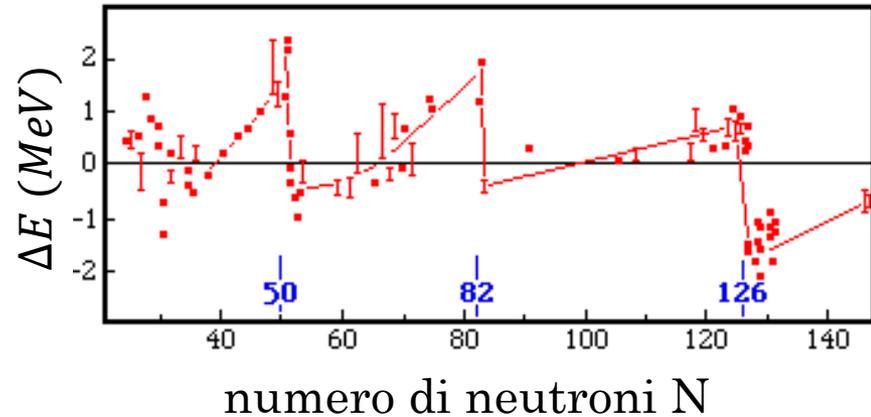
Il modello a goccia non è in grado
di spiegare questo fenomeno

Analogia con i 'gusci completi'
della fisica atomica

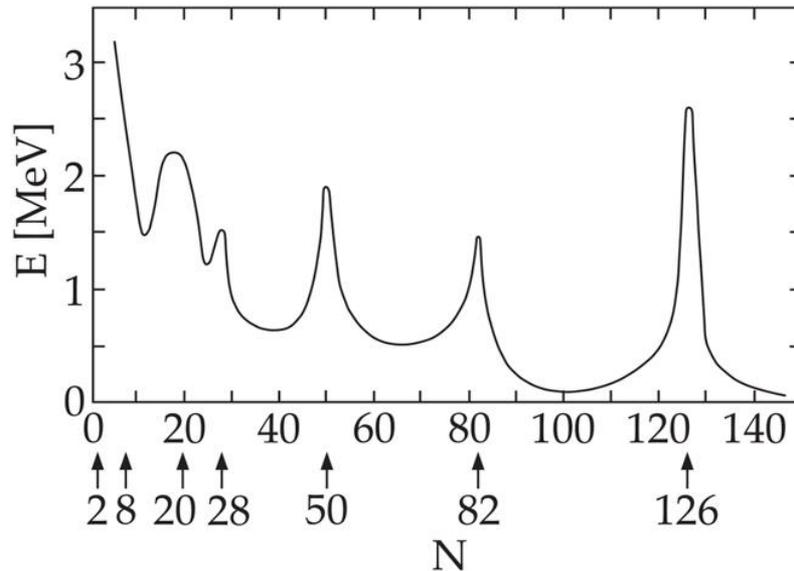
Evidenze dei numeri magici e degli strati nucleari

- Energia di legame dell'ultimo neutrone in funzione del numero di neutroni.

ΔE (MeV) = Energia di legame misurata – energia prevista dalla formula semi-empirica delle masse



- Energia del I stato eccitato in funzione di N



In un nucleo con N magico il I stato eccitato ha energia molto elevata

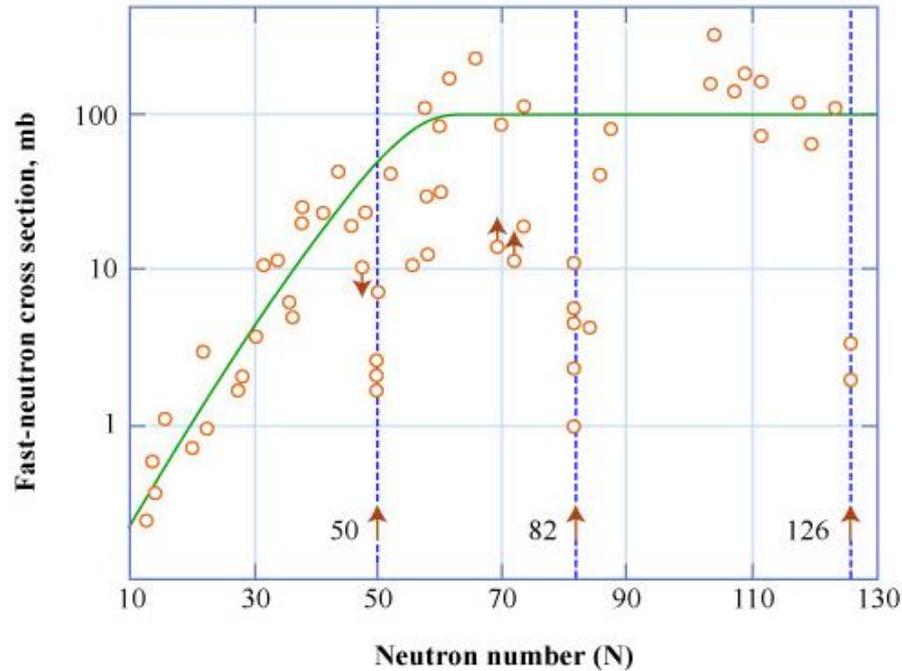
Ad esempio ${}^4\text{He}$ (2+2 doppio magico)



L'energia del primo stato eccitato è di ~ 20 MeV

Evidenze dei numeri magici e degli strati nucleari

- Sezioni d'urto di cattura di neutrone



La sezione d'urto per il processo
$$n + \frac{A}{Z}X \rightarrow \frac{A+1}{Z}X$$

è particolarmente bassa quando
un nucleo contiene 50, 82 o 126
neutroni

Caratteristica accentuata nei
nuclei doppiamente magici
$${}^4_2\text{He}, {}^{16}_8\text{O}, {}^{40}_{20}\text{Ca}, \dots$$

- Caratteristiche dei decadimenti β
- Caratteristiche dei decadimenti α
- Deformazione del nucleo
- Grande abbondanza di nuclidi stabili per $N=50$ o $Z=50$
-

Modello a strati (Shell model)

La teoria atomica basata sul modello a shell ha fornito notevoli risultati.



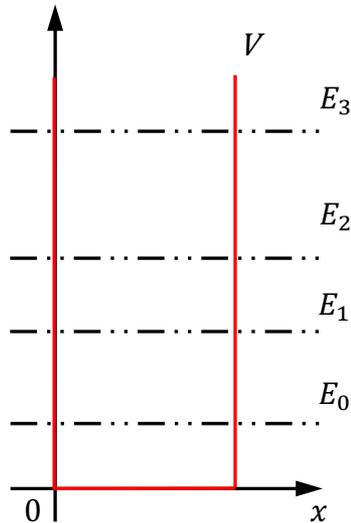
Si è cercato di sviluppare una teoria simile per il problema della struttura nucleare soprattutto in seguito all'evidenza sperimentale dei 'numeri magici'



Il primo passo nello sviluppo del modello a shell è la scelta del potenziale. Iniziamo ricordando due casi noti in MQ non relativistica:

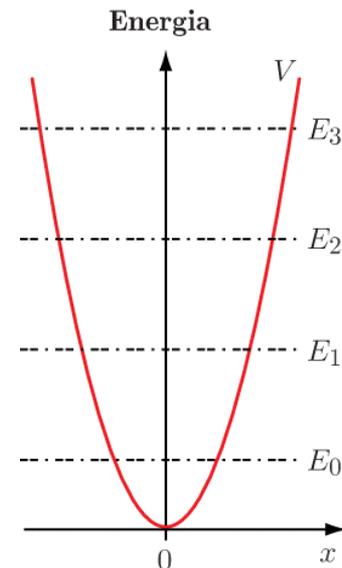
Buca di potenziale sferica infinita

$$\begin{cases} V(r) = 0 & r \leq R \\ V(r) = \infty & r > R \end{cases}$$



Oscillatore armonico

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2$$



Il potenziale dipende solo da r

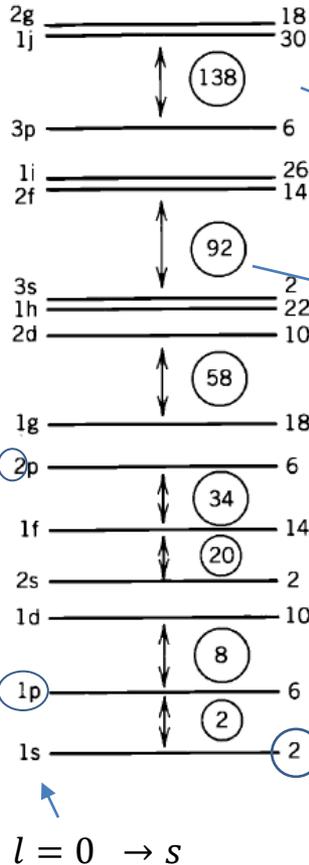
$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{lm_l}(\theta, \phi)$$

Livelli di energia discreti e degeneri

Modello a strati (Shell model)

In questi due casi i livelli energetici risultano essere:

Buca di potenziale sferica infinita



notazione
differente da
atomo:
conteggio del
numero di
livelli con
questo l

non esiste nei
livelli
energetici
atomo

degenerazione degli stati con diverso
momento angolare orbitale l

Tra alcuni livelli si
verificano gap maggiori
(shell chiuse)

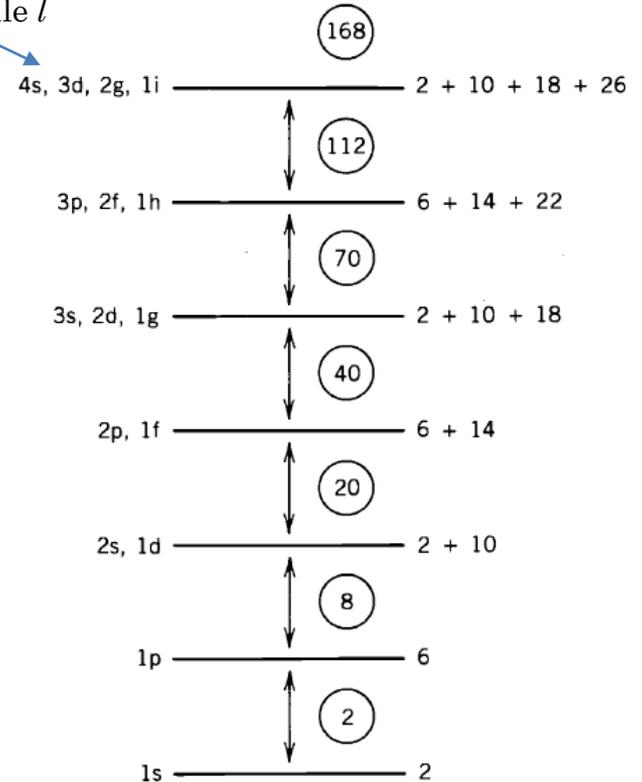
numero totale di nucleoni
per ogni chiusura di shell

Degenerazione di ogni
livello $2(2l + 1)$

m_s

m_l

Oscillatore armonico



Neutroni e protoni vengono contati separatamente.
Quindi il livello 1s può contenere 2 protoni e 2 neutroni.

I numeri magici di 2, 8 e 20 previsti in entrambi i casi ma i livelli più alti non corrispondono affatto ai numeri magici osservati.

Modello a strati (Shell model)

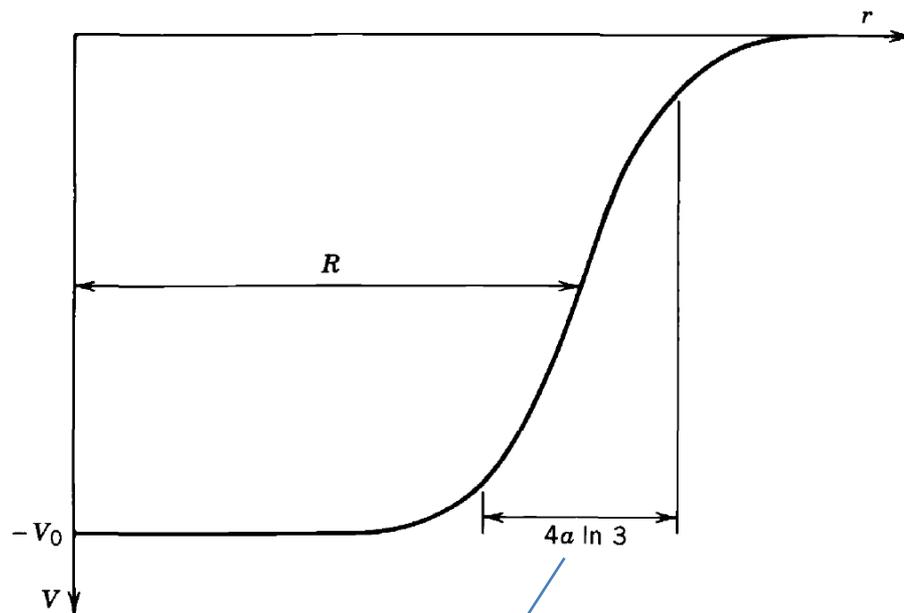
Scegliamo un potenziale più realistico.

- In entrambi i casi precedenti è necessaria energia infinita per rimuovere un neutrone o un protone.
- Il potenziale non deve avere una variazione netta come quella della buca infinita mentre nell'oscillatore armonico la variazione è troppo poco netta.

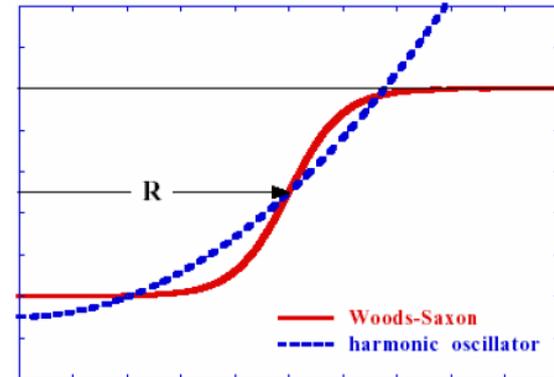
Potenziale di **Woods-Saxon**

$$V_{WS}(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$

deve essere simile a densità nucleare con 'superficie' di $\sim 2.3 \text{ fm}$ per tutti i nuclei



$\sim 2.3 \text{ fm}$



Il raggio medio e lo spessore della 'superficie' sono scelti sulla base di quanto visto in precedenza:

$$R = r_0 A^{1/3} \quad r_0 = 1,2 \text{ fm}$$

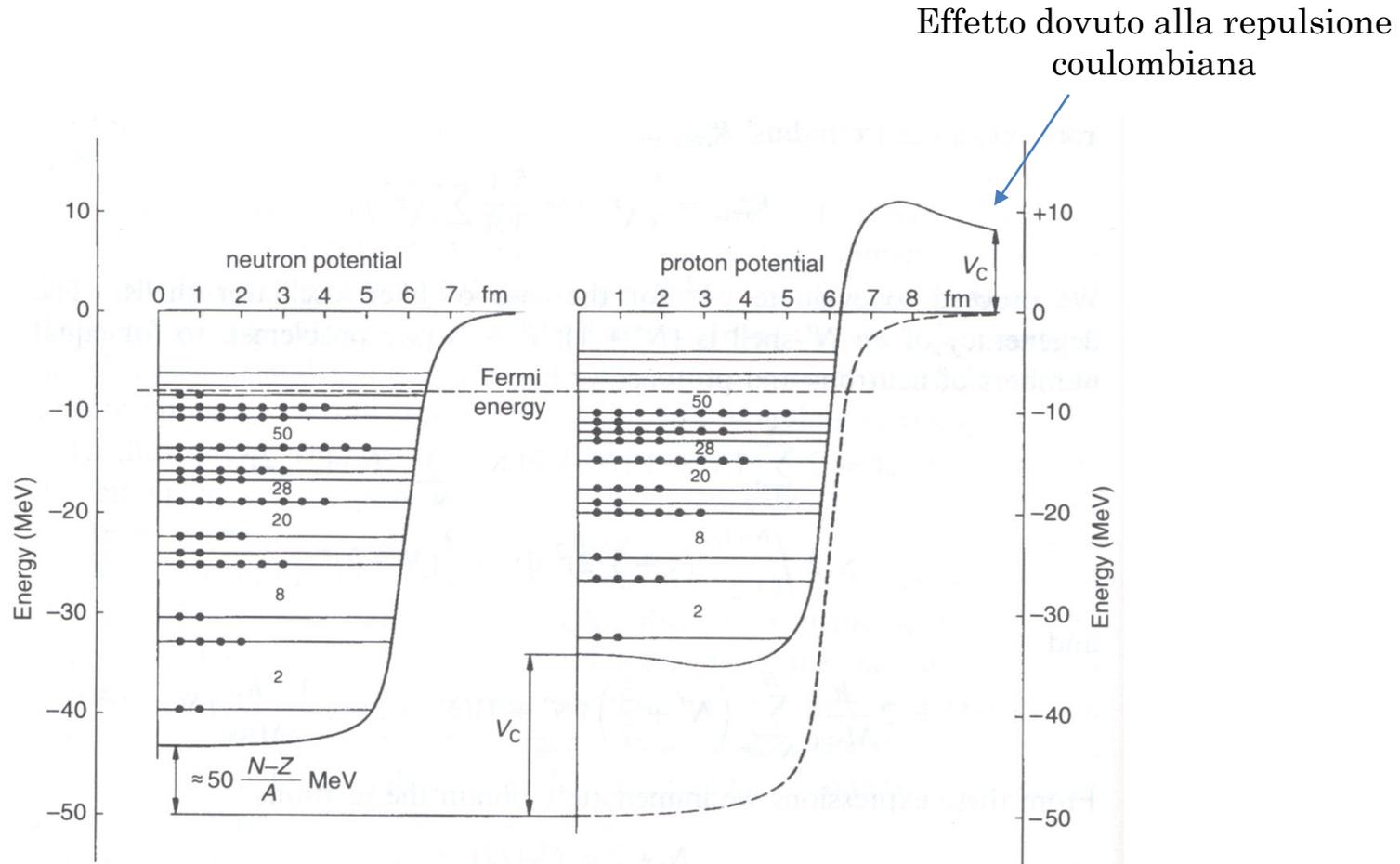
$$a = 0,524 \text{ fm}$$

$$V_0 \sim 50 \text{ MeV}$$

regolato per dare le opportune energie di separazione

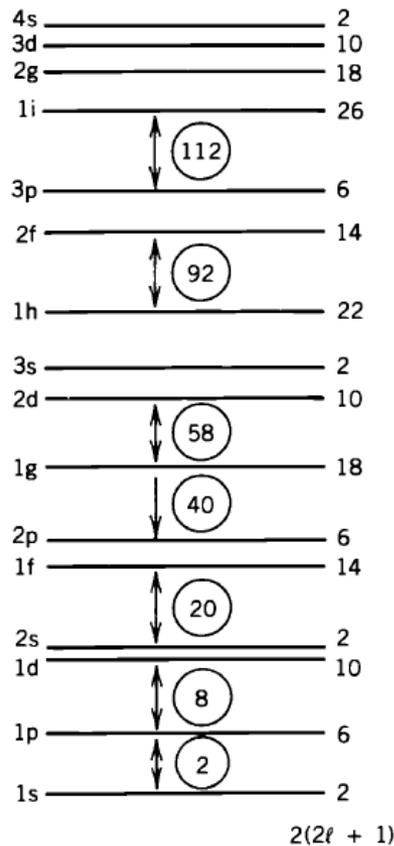
Modello a strati (Shell model)

Scegliamo un potenziale più realistico (Woods-Saxon) al quale possiamo aggiungere il contributo di repulsione coulombiana per i protoni.



Modello a strati (Shell model) – Interazione spin-orbita

Il livelli energetici nel caso del potenziale di Wood-Saxon risultano essere



Rimozione della degenerazione presente nel caso dell'oscillatore armonico

Anche in questo caso si giustificano 2-8-20 ma non gli altri numeri magici (28-50-82-126).

M. G. Meyer e indipendentemente H. Jensen proposero nel 1949 **una forte interazione spin-orbita** che modificasse nel modo voluto la struttura a livelli.

ipotesi puramente fenomenologica

potenziale centrale

$$V(r) = V_{WS}(r) + V_{SO}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$$

La forma di $V_{SO}(r)$ non è particolarmente importante, è $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ che causa il riordinamento dei livelli

interazione spin-orbita

A differenza del caso atomico in cui l'interazione spin-orbita nasce dall'interazione e.m. del momento magnetico dell'elettrone con il campo magnetico generato dal suo movimento attorno al nucleo in questo caso **non può essere di natura e.m.** (sarebbe troppo debole)

Modello a strati (Shell model) – Interazione spin-orbita

Ricordiamo che:

$l \rightarrow$ MOMENTO ANGOLARE NUCLEONE

$$|l|^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad l \text{ intero}$$

$$l_z = m_l \hbar \quad m_l = \pm l, \pm(l-1), \dots, 0$$

($2l+1$ orientazioni)

$s \rightarrow$ SPIN DEL NUCLEONE

$$|s|^2 = \hbar^2 s(s+1) = \hbar^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4} \hbar^2$$

$$s_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

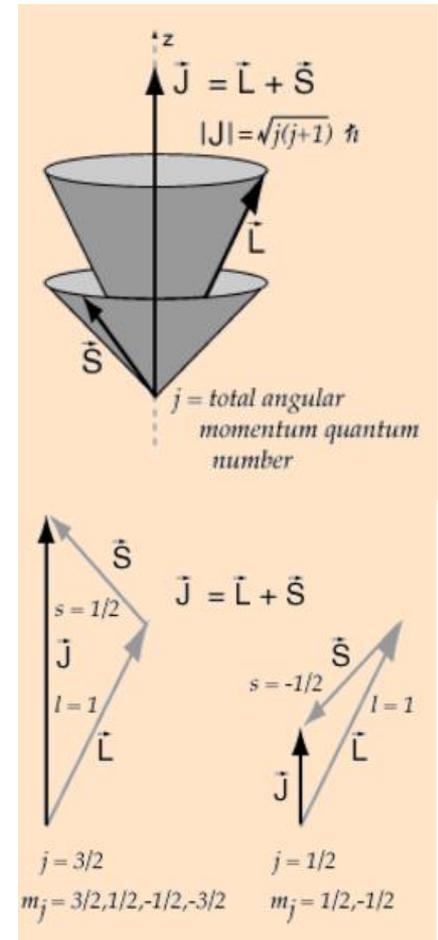
$J \rightarrow$ MOMENTO ANGOLARE TOTALE

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$$

$$|j|^2 = \hbar^2 j(j+1)$$

Regole di addizione $\longrightarrow j = l \pm \frac{1}{2}$

$\begin{matrix} \nearrow + \rightarrow \mathbf{s} \text{ parallelo a } \mathbf{l} \\ \searrow - \rightarrow \mathbf{s} \text{ antiparallelo a } \mathbf{l} \end{matrix}$



Modello a strati – Interazione spin-orbita

Interazione spin-orbita: $E_{SO} \propto \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$

Essendo: $\mathbf{j}^2 = (\mathbf{l} + \mathbf{s})^2 = \mathbf{l}^2 + \mathbf{s}^2 + 2\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{j}^2 - \mathbf{l}^2 - \mathbf{s}^2)$$

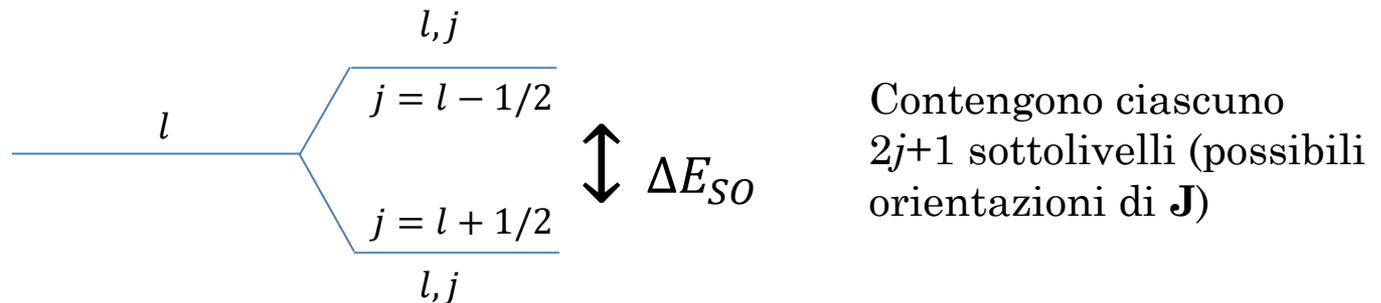
Si ha quindi che:

$$E_{SO} \propto \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \hbar^2$$

$j = l + \frac{1}{2}$
 $j = l - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} l \hbar^2$
 $-\frac{1}{2} (l+1) \hbar^2$

Ogni livello l si divide in due sottolivelli in seguito all'interazione spin-orbita, a seconda dei due valori di j :



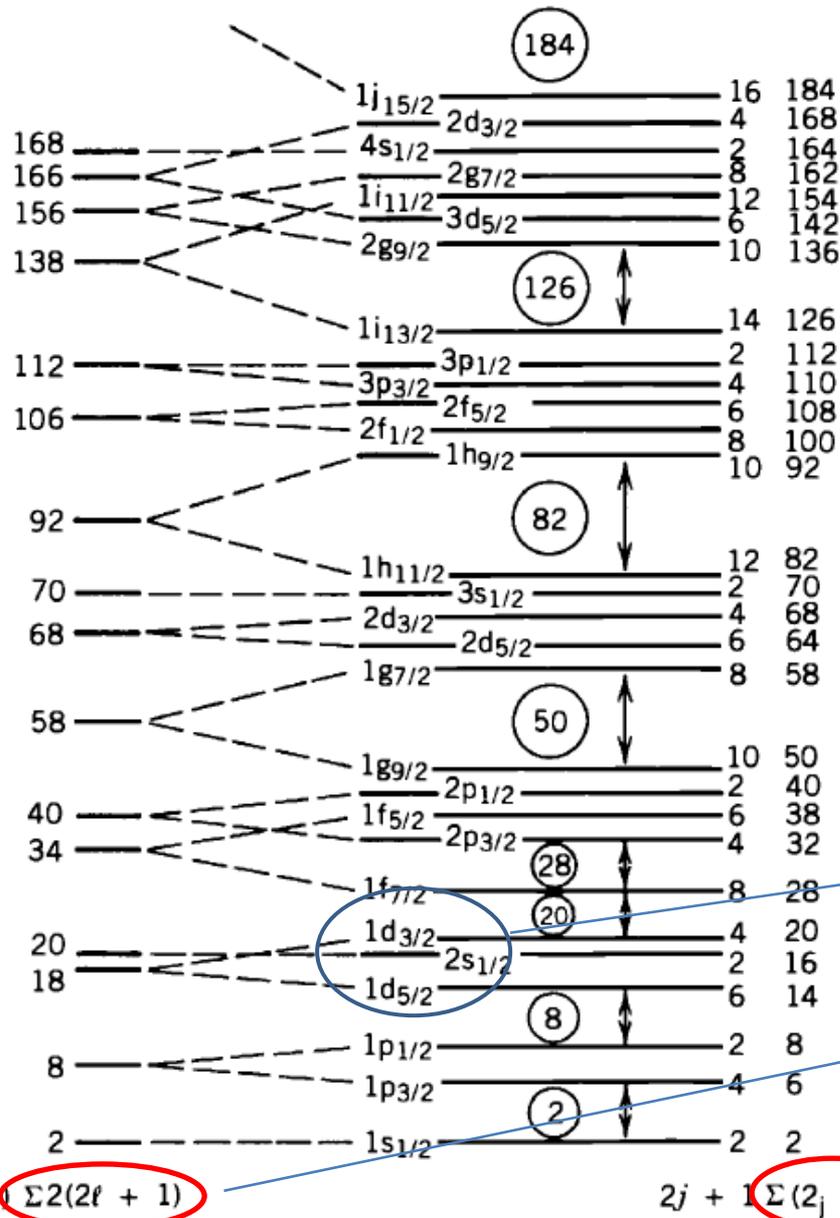
Modello a strati – Interazione spin-orbita

$$\Delta E_{SO} \propto \left| E_{SO} \left(j = l + \frac{1}{2} \right) - E_{SO} \left(j = l - \frac{1}{2} \right) \right| = \left| \frac{1}{2} l \hbar^2 + \frac{1}{2} (l + 1) \hbar^2 \right| = \left(l + \frac{1}{2} \right) \hbar^2$$



- ΔE_{SO} cresce al crescere di l (non c'è per $l=0$)
- ΔE_{SO} è molto grande e genera scavalcamenti rispetto all'ordinamento energetico fissato da l
- Il livello con $j = l - \frac{1}{2}$ ha energia più elevata di quello con $j = l + \frac{1}{2}$ ($V_{SO} < 0$)
- **Permette di spiegare i numeri magici!**
  ha previsto il numero magico 184

Modello a strati – Interazione spin-orbita



Forza centrale empirica

$$V_{WS}(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$

+

Interazione spin-orbita

I numeri magici sono generati da ΔE_{SO}

mischia i livelli

degenerazione 'incrementale' livelli WS

degenerazione 'incrementale' livelli WS+SO

$$\Sigma 2(2l + 1)$$

$$2j + 1 \Sigma(2j + 1)$$

Modello a strati

Il modello a strati non rende conto del fenomeno nel 'pairing' → Spin nucleoni identici: ↑↓

Però il modello a strati + 'pairing' spiega il momento angolare dei nuclei

App. 17

N pari
Z pari ⇒ I = 0 Spiegato solo dal 'pairing'

N pari
Z dispari ⇒ I = j del nucleone spaiato
 N dispari
Z pari ⇒ I = j del nucleone spaiato
 pairing
 lo conosco dal modello a 'strati'!

Esempio ^{17}O :

8 p e 8 n si appaiano dando momento angolare nullo. Rimane n spaiato. Se guardo schema a livelli tale n spaiato deve avere $j = 5/2$. (livello 1d, con $j = l + 1/2$)

I = 5/2 per ^{17}O

N dispari
Z dispari ⇒ Protone spaiato + Neutrone spaiato
 j_p + j_n
 $I = \begin{cases} |j_n - j_p| \\ |j_n + j_p| \end{cases}$

Effetto 'pairing': è attribuito alla cosiddetta interazione residua, ossia quella parte di interazione nucleare che non è descritto dal potenziale centrale + spin-orbita

Z	N	nuclidi stabili
pari	pari	~160
pari	dispari	~50
dispari	pari	50
dispari	dispari	~10

Il modello a strati e i momenti magnetici dei nuclei con A dispari

Tenendo conto che lo spin è definito dal momento angolare dei nucleoni non accoppiati

- Il momento magnetico dei nuclei pari-pari è nullo
- Il momento magnetico dei nuclei con A dispari è definito dallo stato del nucleone non accoppiato

Il momento magnetico totale vale quindi:

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_N (g_l \mathbf{l} + g_s \mathbf{s})$$

Consideriamo j che precece attorno a z (j_z costante) mentre l e s precedono attorno a j . Le componenti di l e s lungo j sono quindi costanti mentre l_z e s_z variano. Calcoliamo quindi:

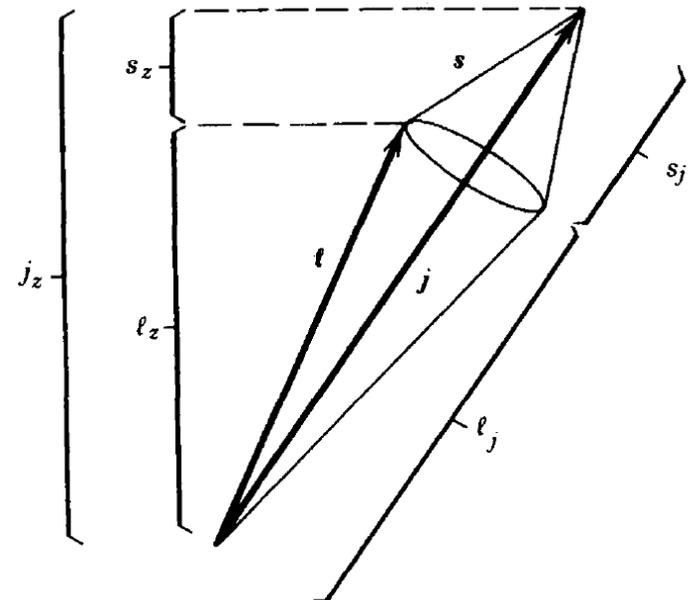
$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \frac{(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j}}{|\mathbf{j}|^2} = \frac{g_l \mathbf{l} \cdot \mathbf{j} + g_s \mathbf{s} \cdot \mathbf{j}}{\hbar j(j+1)} \mathbf{j}$$

vettore unitario $\mathbf{j}/|\mathbf{j}|$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{2}(j^2 + l^2 - s^2) = \frac{1}{2} \left(j(j+1) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \hbar^2$$

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{2}(j^2 - l^2 + s^2) = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) + \frac{3}{4} \right) \hbar^2$$

$$\mu/\mu_N = \begin{cases} \left(j - \frac{1}{2} \right) g_l + \frac{1}{2} g_s & j = l + \frac{1}{2} \\ \frac{j}{j+1} \left[\left(j + \frac{3}{2} \right) g_l - \frac{1}{2} g_s \right] & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$



Il modello a strati e i momenti magnetici dei nuclei con A dispari

Ricordiamo ora che per protoni e neutroni i valori di g_l e g_s sono:

	p	n
g_l	1	0
g_s	5,5855	-3,8263

Quindi se il **nucleone non accoppiato è un protone** (nuclei con un numero dispari di protoni)

$$\mu/\mu_N = \begin{cases} j + 2,29 & j = l + \frac{1}{2} \\ \frac{j}{j+1}(j - 1,29) & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Z DISPARI, N PARI

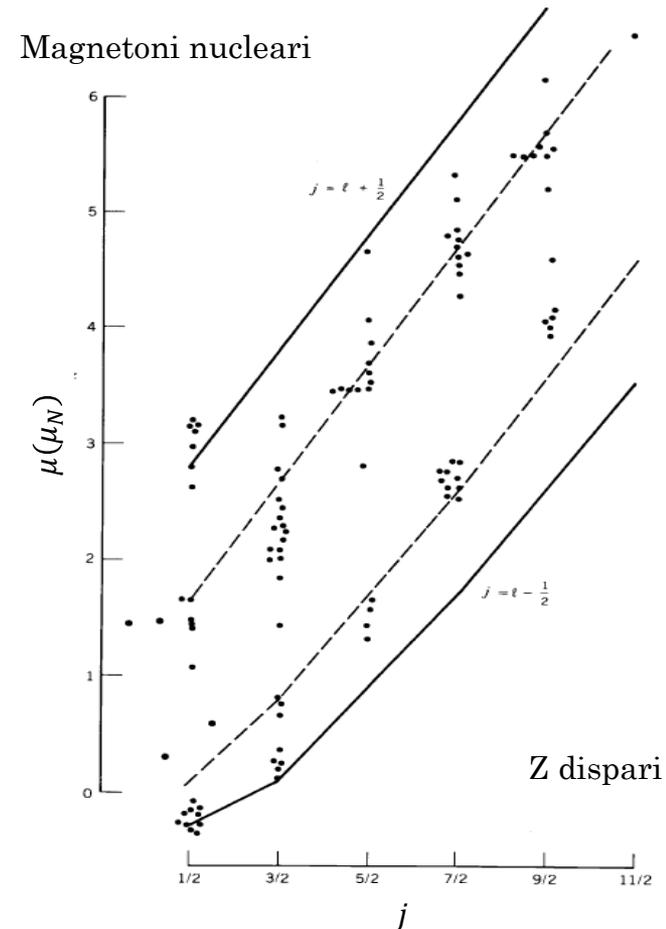


μ viene da p spaiato $I = j_p$

Solo in questo caso si ha
accordo con i dati

$$g_s = 0,6 \cdot g_s(\text{libero})$$

Valore del nucleone libero e nel
nucleo può essere diverso

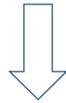


Momenti magnetici dei nuclei

Se invece il **nucleone non accoppiato è un neutrone** (nuclei con un numero dispari di neutroni)

$$\mu/\mu_N = \begin{cases} -1,9131 & j = l + \frac{1}{2} \\ 1,9131 \frac{j}{j+1} & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Z PARI, N DISPARI



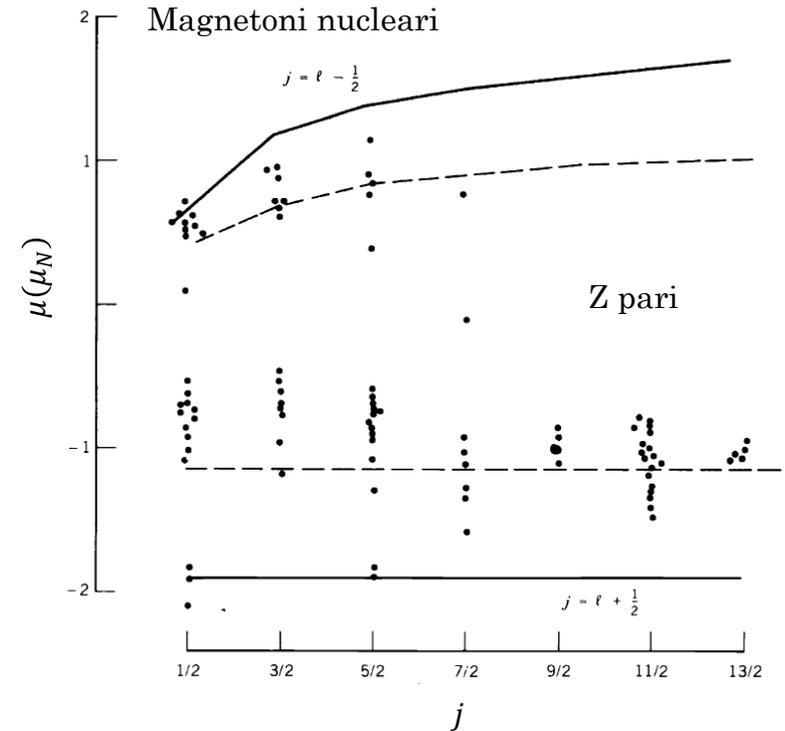
μ viene da n spaiato $I = j_n$



RISULTATO NOTEVOLE – Curve di Schmidt

Per A dispari, sia per Z che per N dispari, le relazioni $\mu - I$ sono descritte da due curve su cui si trovano i dati di **tutti i nuclidi**.

In realtà i dati stanno tra le due curve → parziale inadeguatezza del modello a strati



Cenni al modello collettivo del nucleo

Il modello a shell funziona bene quando:

Nucleo = strato completo + 1 o 2 nucleoni addizionali



Piccole deviazioni dalla forma sferica; eccitazioni del nucleo = eccitazioni del nucleone addizionale

Ma per shell piene a metà

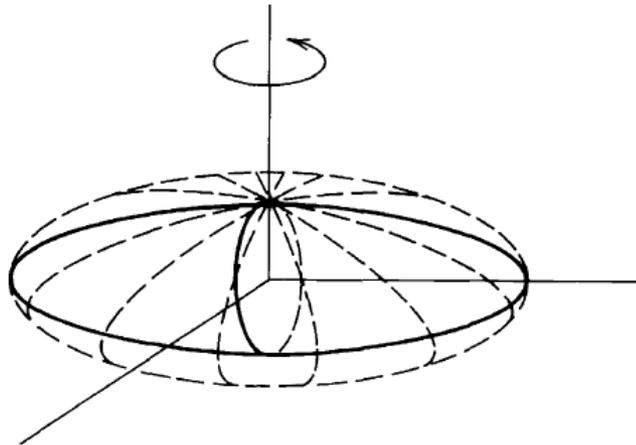
- Si hanno forti deviazioni dalla forma sferica (momenti di quadrupolo elettrico)
- Fallisce il concetto di particella indipendente



Moti collettivi

I moti collettivi sono di due tipi

- ROTAZIONALE (nuclei deformati per $A > 150$)



$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} I(I + 1)$$



Momento di inerzia

$$I = 0, 2, 4$$



Momento angolare di rotazione dell'intero nucleo

Cenni al modello collettivo del nucleo

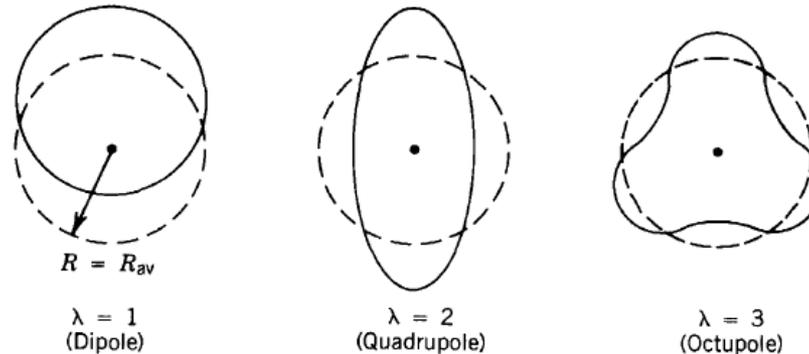
- VIBRAZIONALE (attorno alla forma sferica per $A < 150$)

La forma media del nucleo è sferica, quella istantanea no.



La produzione di vibrazioni meccaniche comporta la produzione di fononi vibrazionali

Serie di linee equispaziate di $\hbar\omega$



I moti collettivi sono associati ad una struttura a livelli più fine (1-100 keV) di quella che discende dal modello a particelle indipendenti ($\sim 1 \text{ MeV}$)

Spesso i moti collettivi sono fortemente accoppiati ai moti di particella indipendente.

Complessa struttura a livelli, indagabile mediante la spettroscopia γ nucleare