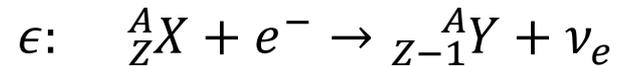
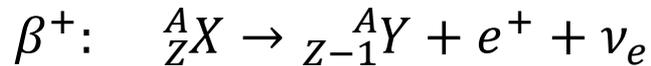
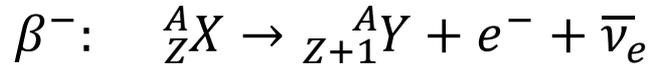


Decadimenti

Beta

Emissione Beta

Processi spontanei che riguardano diversi nuclidi e che consistono nella trasformazione di un protone in un neutrone o di un neutrone in un protone:

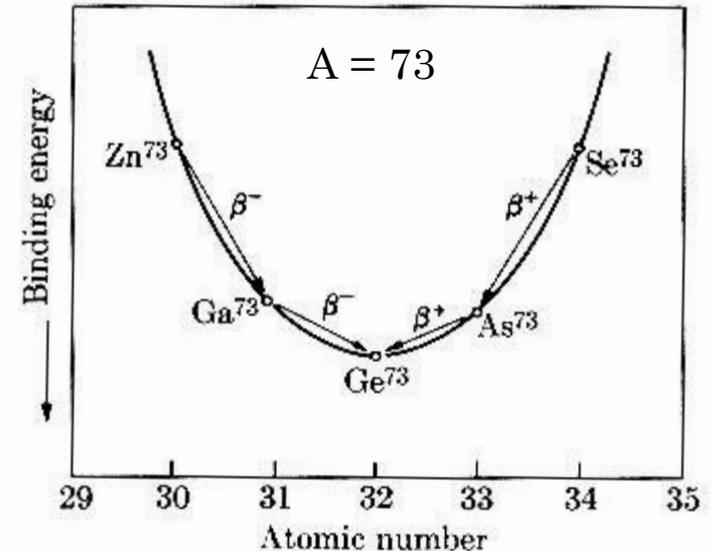


I decadimenti β cambiano sia Z che N di 1 unità e quindi A rimane costante:

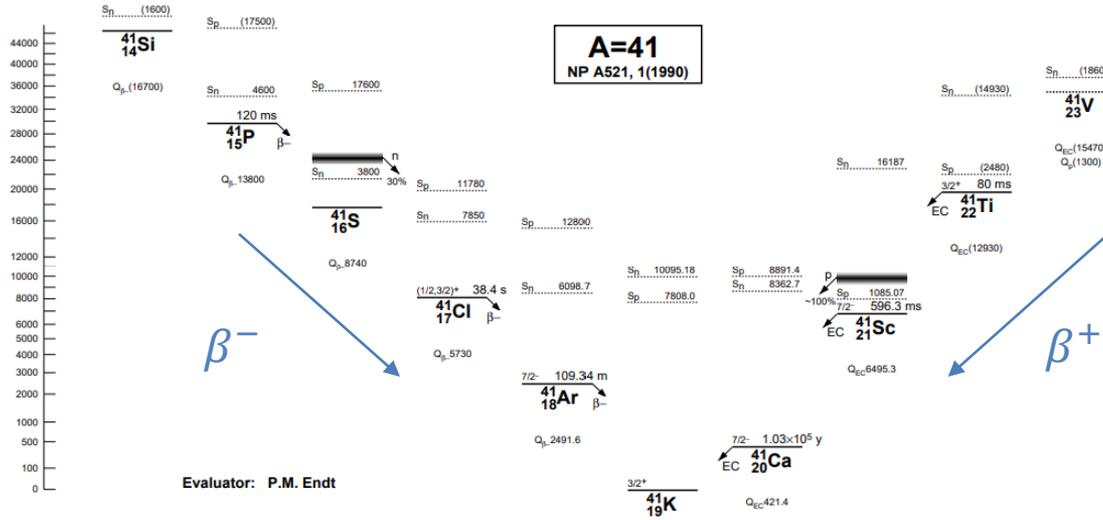
$$Z \rightarrow Z \pm 1 \quad N \rightarrow N \mp 1 \quad \Rightarrow \quad A = Z + N = \text{costante}$$

I decadimenti β permettono quindi ai nuclei instabili di 'scivolare' lungo la parabola delle masse per A costante fino ad arrivare al nucleo stabile.

Per A costante la formula semi-empirica per le masse nucleari è una parabola

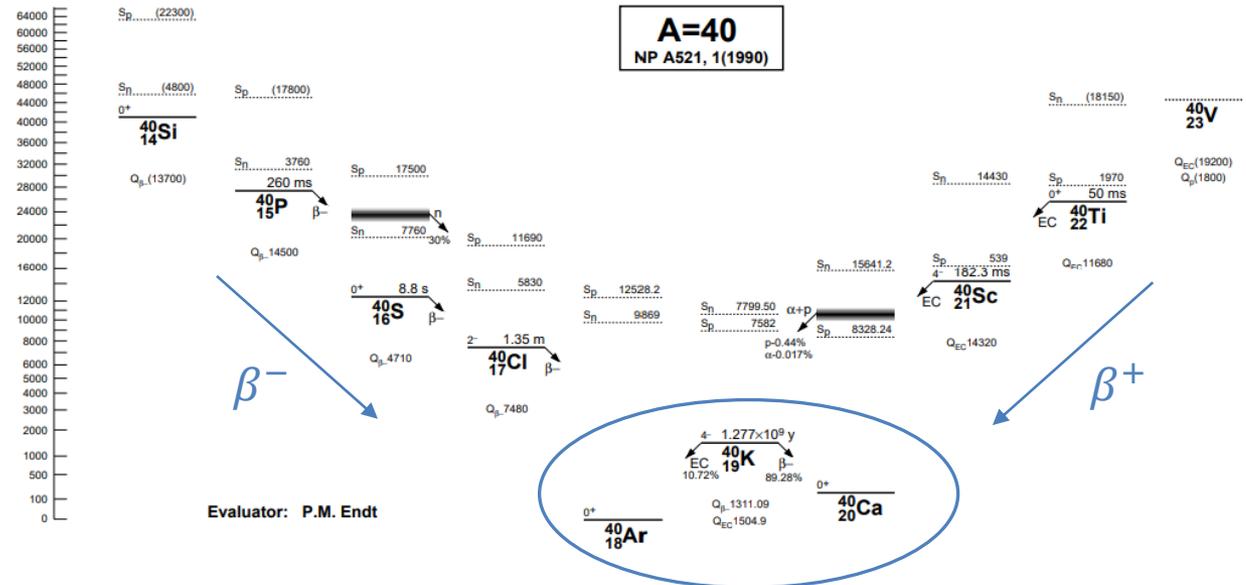


Emissione Beta



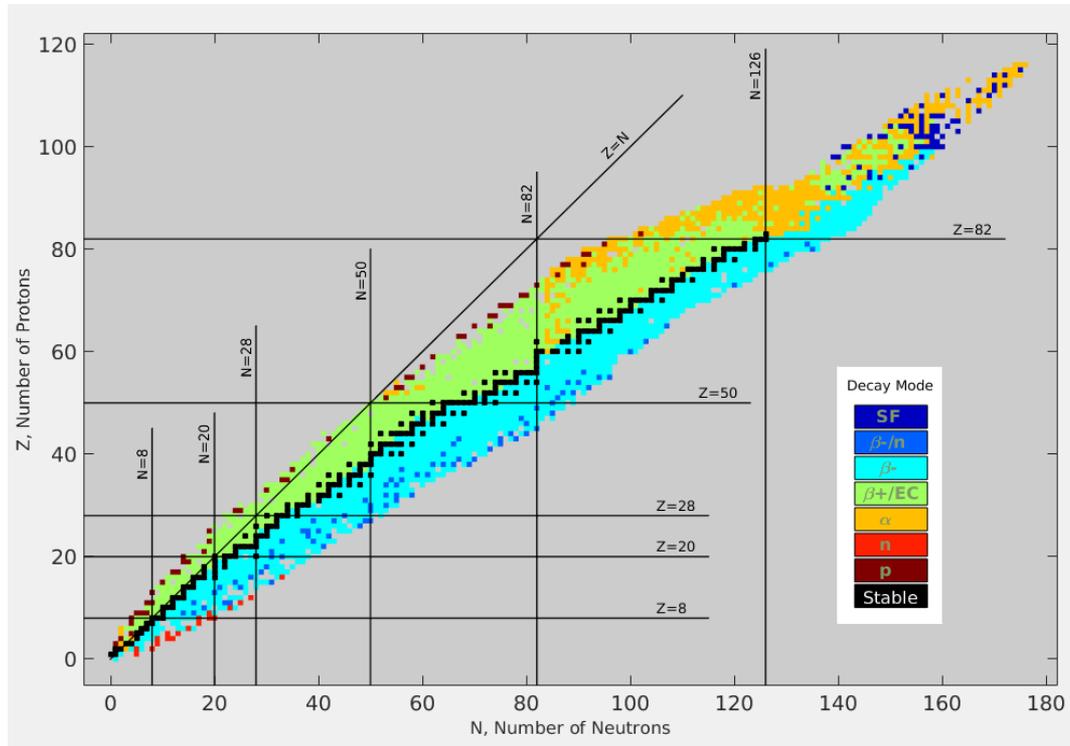
A dispari
↓
1 parabola

A pari
↓
2 parabole

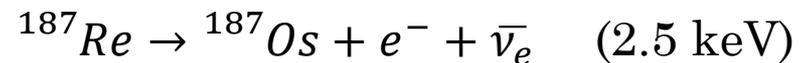


Emissione Beta

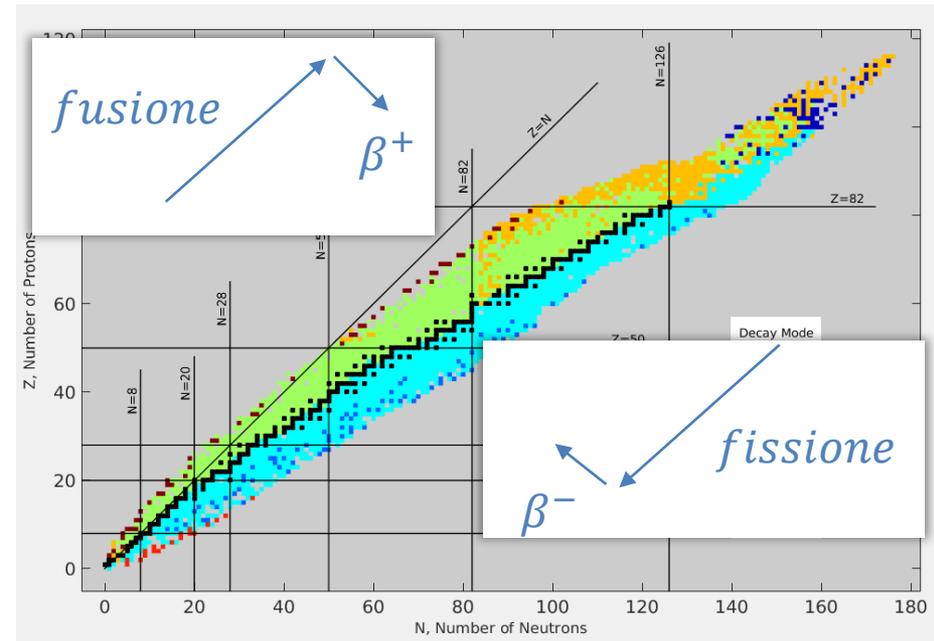
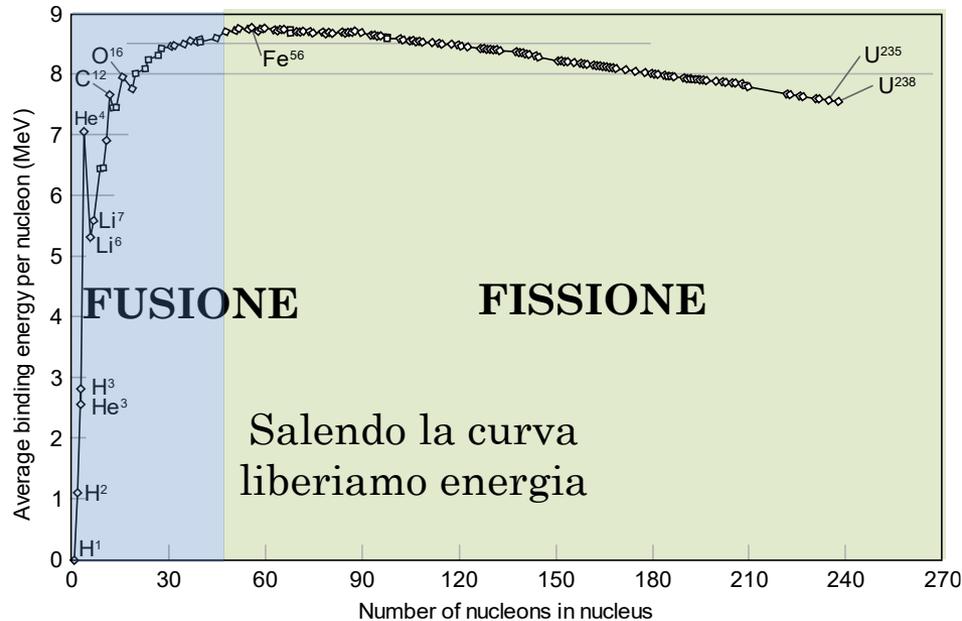
Tutti i nuclei possono decadere beta (non ci sono restrizioni come nel caso dei decadimenti alfa)



A differenza dei decadimenti alfa, i decadimenti beta possono avere energie anche molto diverse tra loro.



Emissione Beta



Stelle → sorgenti di neutrini

Reattori nucleari → sorgenti di antineutrini

Radioisotopi Terra → sorgenti di (anti)neutrini

Emissione Beta

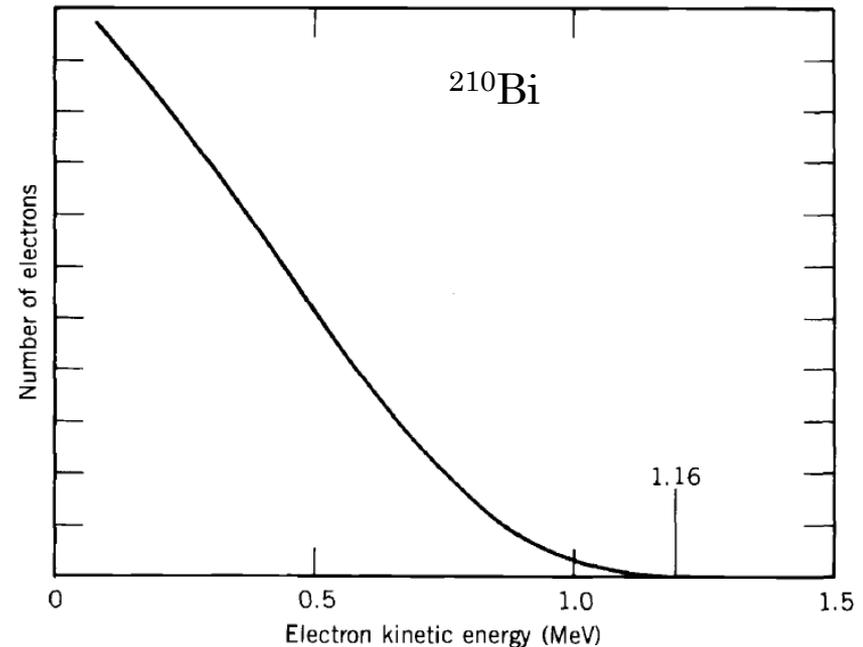
La misura sperimentale di uno spettro energetico continuo degli elettroni emessi nel decadimento β non è stata di facile interpretazione.

Se si trattava di un **processo a due corpi** come nel caso del decadimento α gli elettroni emessi avrebbero dovuto avere **energie ben definite**

Si osservarono **invece degli spettri continui** tra 0 e il Q valore della transizione.

Nel 1931 Pauli ipotizzò che nel decadimento venisse emessa una seconda particella, chiamata successivamente neutrino da Fermi.

Essendo il neutrino una particella molto penetrante la probabilità di **interazione all'interno del rivelatore stesso è nulla** quindi il neutrino si 'porta via' parte dell'energia rilasciata dal processo.



Per la conservazione della carica il neutrino doveva avere **carica elettrica nulla e spin 1/2**.

Cinematica Beta

Per studiare la cinematica del processo iniziamo analizzando il decadimento del **neutrone libero** ($\tau \sim 15 \text{ min}$)

Differenza tra la massa dello stato iniziale e la massa dello stato finale



decadimento a 3 corpi!!
Spettro continuo per e^{-}

$$\begin{aligned} Q &= (m_n - m_p - m_e - m_{\bar{\nu}})c^2 \\ &= 939,573 \text{ MeV} - 938,928 \text{ MeV} - 0,511 \text{ MeV} - m_{\bar{\nu}}c^2 \\ &= 0,782 \text{ MeV} - m_{\bar{\nu}}c^2 \end{aligned}$$

Sperimentalmente si misurò un'energia massima degli elettroni emessi in questo decadimento di $0,782 \pm 0,013 \text{ MeV}$

Quindi, nel limite della precisione sperimentale di 13 keV, dobbiamo concludere che il neutrino ha massa nulla!

L'energia di rinculo del protone è trascurabile 0,3 keV

Esperimenti recenti hanno precisioni maggiori

Cinematica Beta

Per studiare la cinematica del decadimento iniziamo considerando il decadimento β^-

$$\beta^-: \quad {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$$

trascuriamo la massa del neutrino perché $m_\nu \approx 0$

$$Q_{\beta^-} = [m_N({}^A_Z X) - m_N({}^A_{Z+1} Y) - m_e]c^2$$

Consideriamo la massa atomica:

$m_N =$ massa nucleare!

$$m({}^A X)c^2 = m_N({}^A X) + Zm_e c^2 - \sum_{i=1}^Z B_i$$

energia di legame degli **elettroni**!

Riscrivendo quindi in funzione della massa atomica:

$$Q_{\beta^-} = \{[m({}^A X) - Zm_e] - [m({}^A Y) - (Z + 1)m_e] - m_e\}c^2 + \{\sum_{i=1}^Z B_i - \sum_{i=1}^{Z+1} B_i\}$$

In questo caso (β^-) tutte le masse degli e^- si semplificano

questa differenza è molto piccola perché



$$Q_{\beta^-} = [m({}^A X) - m({}^A Y)]c^2$$

Cinematica Beta

Q_{β^-} è l'energia disponibile a seguito del decadimento che viene quindi suddivisa tra e^- e $\bar{\nu}$

$$Q_{\beta^-} = T_e + E_{\bar{\nu}}$$

energia cinetica e^-

energia totale ν perché $m_\nu \sim 0$

Se quasi tutta l'energia è acquisita da una delle due particelle

$$(T_e)_{max} = (E_{\bar{\nu}})_{max} = Q_{\beta^-}$$

Notiamo che se $m_\nu > 0$

$$Q'_{\beta^-} = [m(^A X) - m(^A Y) - m_\nu]c^2 = Q_\beta - m_\nu c^2$$



$$m_\nu = Q - (T_e)_{max}$$



Potenziale tecnica per misura m_ν

L'energia disponibile nel caso di decadimenti β^+ o **cattura elettronica** risulta essere:

$$Q_{\beta^+} = [m(^A X) - m(^A Y) - 2m_e]c^2$$

soglia per $\beta^+ = 1,022 \text{ MeV}$

$$Q_\epsilon = [m(^A X) - m(^A Y)]c^2 - B_n$$

energia di legame della shell n (n=K,L,..)

neutrino emesso con energia definita

emissione raggi X tipici del figlio

Un decadimento è energeticamente possibile se $Q > 0$

I decadimenti β^+ e ϵ portano dallo stesso nucleo iniziale $^A_Z X$ allo stesso nucleo finale $^A_{Z-1} Y$ ma alcune volte solo la ϵ è possibile ($2m_e c^2 \gg B_n$)

Teoria di Fermi

Il decadimento β non può essere trattato come quello α per vari motivi:

- no barriera di potenziale (carica opposta e^- e p)
- elettrone e neutrino non esistono prima del decadimento

Nel 1934 Fermi sviluppò la teoria del decadimento β basandosi sull'ipotesi di Pauli.

Nel decadimento viene emessa anche una seconda particella, il neutrino.

La probabilità di transizione per unità di tempo da uno stato iniziale i allo stato finale f è descritta dalla **Regola d'oro di Fermi**:

interazione che causa il decadimento trattata come una debole perturbazione

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

'elemento di matrice'

densità di stati finali

$$V_{fi} = \int \psi_f^* V \psi_i dv$$

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f}$$

interazione che causa la transizione tra lo stato iniziale ψ_i e lo stato finale ψ_f

numero di stati finali dn nell'intervallo dE_f

La probabilità di transizione è maggiore se c'è un elevato numero di stati finali accessibili

Teoria di Fermi

Elemento di matrice V_{fi} nel decadimento β^\pm

La funzione d'onda dello stato finale deve includere, oltre al nucleo, anche l'elettrone e il neutrino

$$V_{fi} = g \int [\psi_f^* \phi_e^* \phi_\nu^*] O_X \psi_i dv$$

costante che determina l'intensità dell'interazione (ruolo analogo a e per campo e.m.)

Termine di interazione V non era noto. Fermi prese in considerazione tutti gli operatori compatibili con relatività speciale.

Le funzioni d'onda di e^- e ν hanno la forma di quella di particelle libere (non hanno interazioni nucleari)

$$\phi_e(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$$

raggio nucleo

Volume entro il quale sono contenuti e^- e ν (serve solo per la normalizzazione, nel risultato finale sparisce)

Per un e con energia cinetica di 1 MeV si ha

$$p = 1,4 \frac{\text{MeV}}{c} \rightarrow \frac{p}{\hbar} = 0,007 \text{ fm}^{-1} \rightarrow pr \ll 1$$

e possiamo quindi espandere l'esponente

Discorso analogo per ν

$$e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} = 1 + i \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar} + \dots \cong 1$$

In questa approssimazione (allowed approximation), gli unici fattori che dipendono dall'energia di e^- e ν derivano dalla densità degli stati finali

$$\phi_e(r) = \phi_\nu(r) = \frac{1}{\sqrt{V}}$$

Solitamente viene definito **elemento di matrice nucleare**

$$V_{fi} \frac{V}{g} = M_{fi} = \int \psi_f^* O_X \psi_i dv$$

Teoria di Fermi

Densità di stati finali $\rho(E_f)$

Il fattore densità degli stati (all'ordine più basso) determina la forma dello spettro beta.

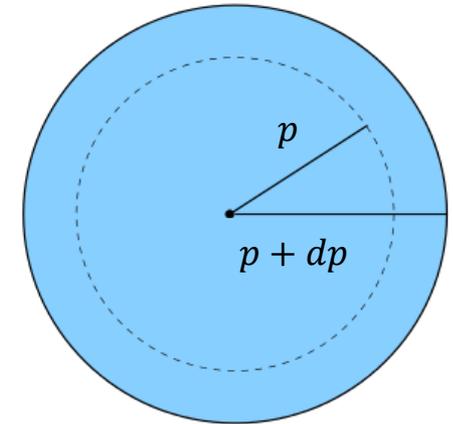
Per conoscere la densità degli stati dobbiamo conoscere il numero di stati finali accessibili ai prodotti del decadimento: elettrone/positrone con momento \mathbf{p} e neutrino/antineutrino con momento \mathbf{q} .

In un cubo di lato V , il numero di stati finali per l'elettrone dn_e che hanno momento compreso nell'intervallo $[p, p + dp]$ vale

$$dn_e = \frac{4\pi p^2 dp V}{h^3}$$

rende dn_e numero puro

In un sistema di coordinate p_x, p_y, p_z l'insieme dei punti che rappresentano un momento nell'intervallo $[p, p + dp]$ si trovano su un guscio sferico di raggio $|\mathbf{p}| = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}$ e spessore dp di volume $4\pi p^2 dp$



In modo analogo per il neutrino abbiamo:

$$dn_\nu = \frac{4\pi q^2 dq V}{h^3}$$

Quindi il numero di stati finali che hanno simultaneamente l'elettrone e il neutrino con il momento corretto sarà:

$$d^2n = dn_e dn_\nu = \frac{(4\pi)^2 V^2 p^2 dp q^2 dq}{h^6}$$

Teoria di Fermi

Inseriamo quindi i risultati ottenuti per la densità di stati e per la matrice nucleare nella regola d'oro di Fermi

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad \Rightarrow \quad d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{fi}|^2 (4\pi)^2 \frac{p^2 dp q^2}{h^6} \frac{dq}{dE_f}$$

Rate di decadimento di e^- e ν con momento $[p, p + dp]$ e $[q, q + dq]$

Integrando su tutti i momenti ottengo il rate di decadimento totale

ν a massa nulla

Dato che $E_f = E_e + E_\nu = E_e + qc$ si ha che $\frac{dq}{dE_f} = \frac{1}{c}$ per E_e fissato.

Essendo interessati allo **spettro dell'elettrone**, tutti i fattori che non coinvolgono il momento possono essere riuniti in una **costante C**:

Numero di elettroni con momento $[p, p + dp]$ \longrightarrow $N(p)dp = Cp^2 q^2 dp$

Ricordiamo che trascurando il rinculo del nucleo

$$q = \frac{Q - T_e}{c} = \frac{Q - \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + m_e c^2}{c}$$

$$N(p) = \frac{C}{c^2} p^2 (Q - T_e)^2 = \frac{C}{c^2} p^2 \left[Q - \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + m_e c^2 \right]^2$$

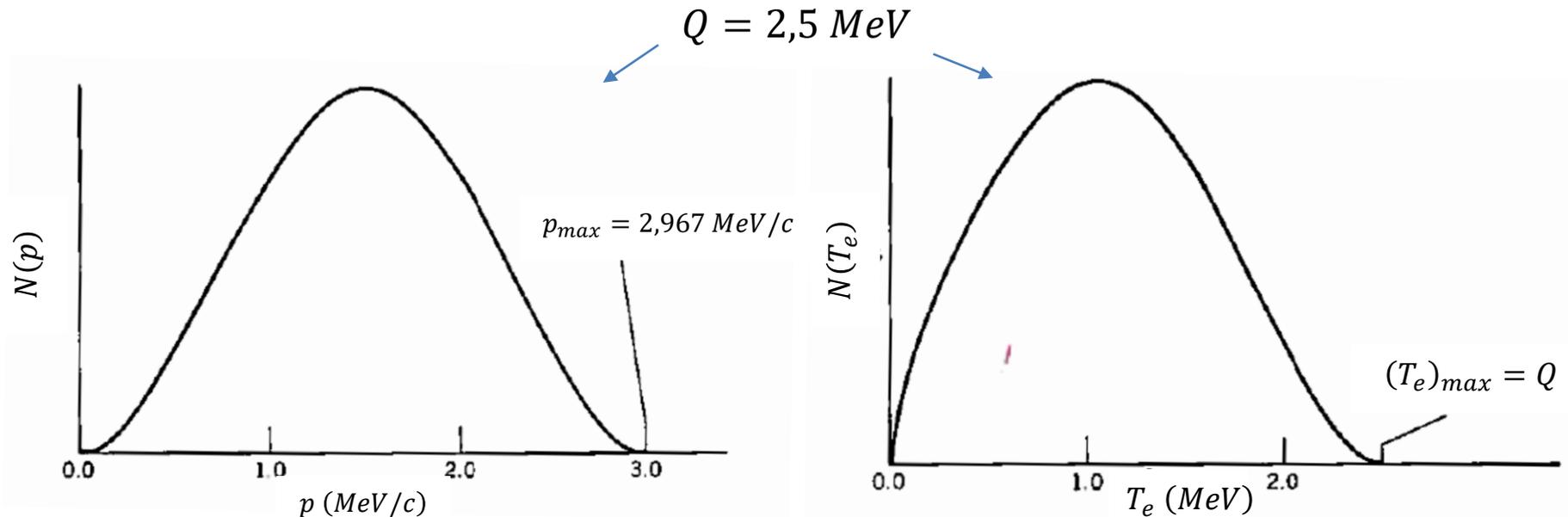
Teoria di Fermi

Riassumendo, partendo dalla regola d'oro di Fermi abbiamo determinato il numero di elettroni in funzione del loro momento

$$N(p) = \frac{C}{c^2} p^2 (Q - T_e)^2 = \frac{C}{c^2} p^2 \left[Q - \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + m_e c^2 \right]^2$$

Spesso però siamo interessati allo spettro energetico degli elettroni emessi:

$$c^2 p dp = (T_e + m_e c^2) dT_e \longrightarrow N(T_e) = \frac{C}{c^5} (T_e^2 + 2T_e m_e c^2)^{\frac{1}{2}} (Q - T_e)^2 (T_e + m_e c^2)$$



Teoria di Fermi

La formula appena ricavata differisce tuttavia dagli spettri sperimentali a causa di alcuni fattori correttivi:

App. 24

- Modifica dovuta all'attrazione/repulsione degli e^-/e^+ dal nucleo

Fattore correttivo \rightarrow Funzione di Fermi $\rightarrow \mathbf{F(Z', p)}$  dipende dalla carica del nucleo figlio

- Effetti legati alla matrice nucleare

Allowed approximation nel calcolo della matrice nucleare ($e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \cong 1$)

Spesso questa approssimazione funziona molto bene ma esistono casi in cui M_{fi} si annulla se si considera solo il primo termine quindi dobbiamo considerare i termini successivi.

 **forbidden decays**

Introduzione di ulteriore fattore correttivo $\mathbf{S(p, q)}$ dipendente dal momento di e^- e ν

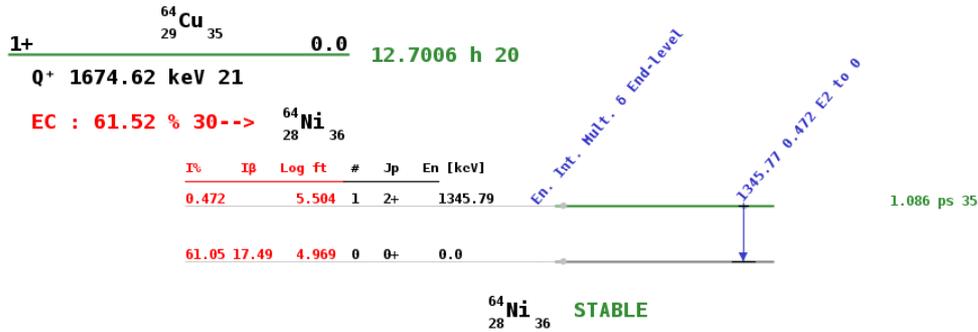
 **shape factor**

Tenendo conto di questi fattori:

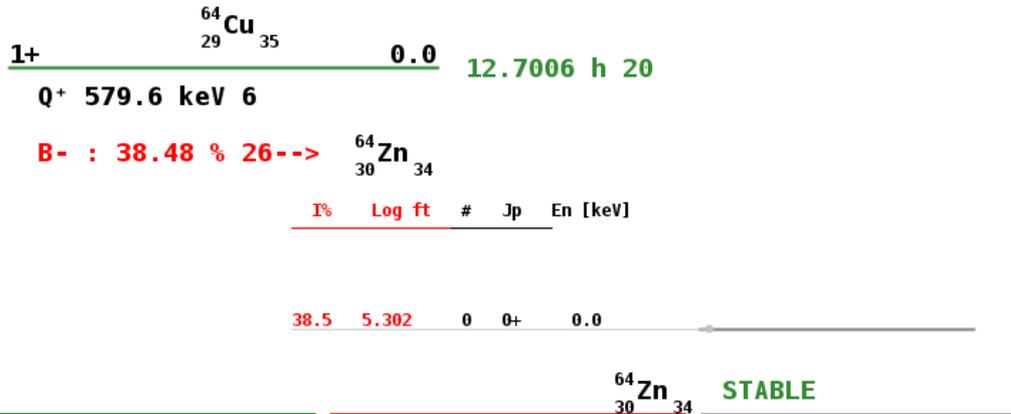
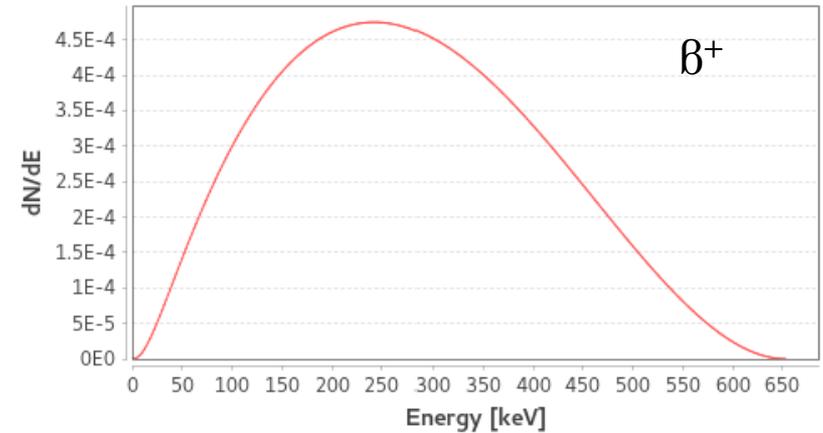
$$N(p) \propto p^2 (Q - T_e)^2 \quad \longrightarrow \quad N(p) \propto p^2 (Q - T_e)^2 F(Z', p) S(p, q)$$

Teoria di Fermi

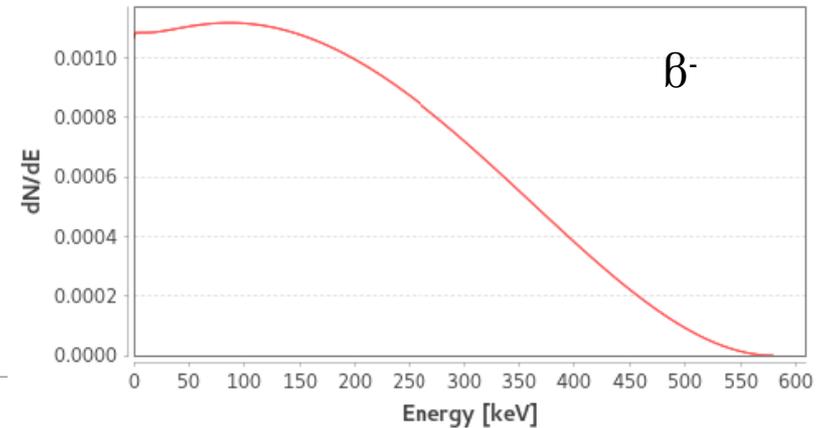
Spettro beta ^{64}Cu



Beta spectrum



Beta spectrum



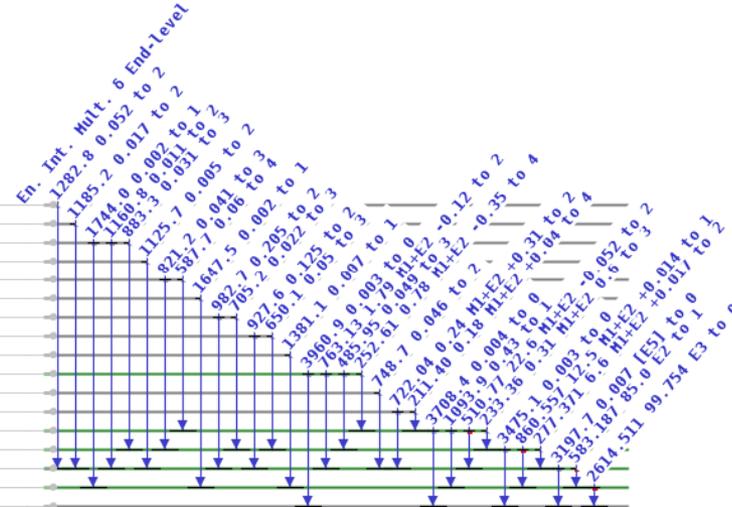
Teoria di Fermi

Spettro beta ^{208}Tl

$^{208}\text{Tl}_{127}$
 $5+$ 0.0 $3.053 \text{ m } 4$
 $Q^+ 4999.0 \text{ keV } 17$

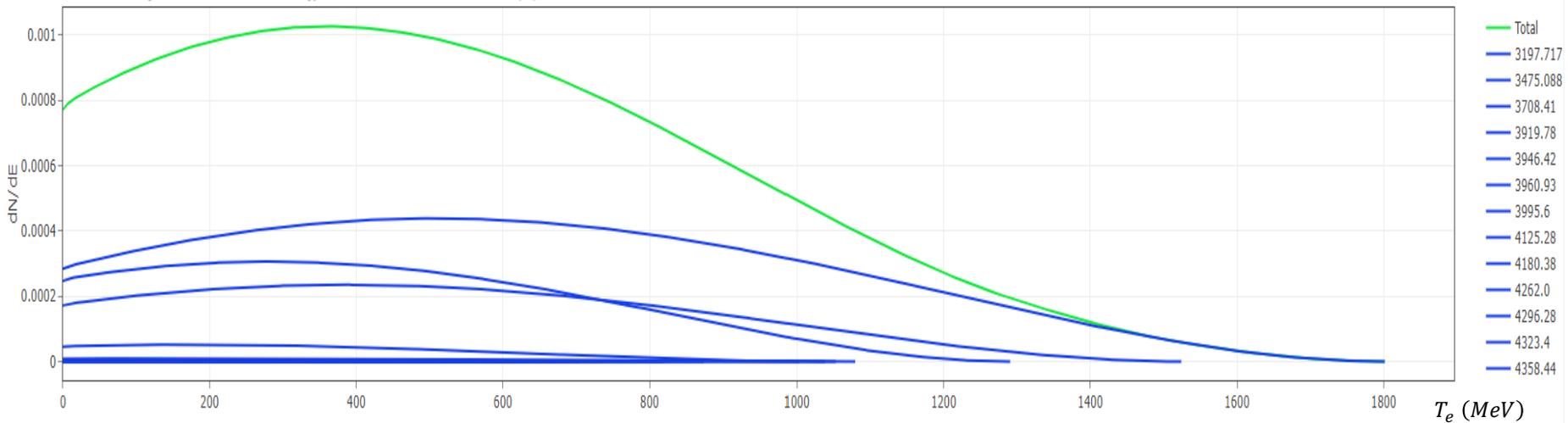
B- : 100.0 % 0--> $^{208}\text{Pb}_{126}$

I%	Log ft	#	Jp	En [keV]
0.052	6.67	16	6-	4480.5
0.017	7.4	15	6-	4382.9
0.044	7.05	14	4-	4358.44
0.005	8.1	13	4+	4323.4
0.101	6.83	12	5-	4296.20
0.002	8.6	11	4-	4262.0
0.227	6.70	10	5-	4180.38
0.175	6.92	9	5-	4125.28
0.007	8.5	8	4-	3995.6
3.18	5.92	7	5-	3960.93
0.046	7.78	6	4-	3946.42
0.63	6.68	5	6-	3919.78
24.2	5.38	4	5-	3708.41
22.2	5.68	3	4-	3475.088
49.1	5.61	2	5-	3197.717
		1	3-	2614.529
		0	0+	0.0



$\leq 18 \text{ ps}$
 100 ps
 $4 \text{ ps } 3$
 $294 \text{ ps } 15$
 $16.7 \text{ ps } 3$

$^{208}\text{Pb}_{126}$ **STABLE**



- Total
- 3197.717
- 3475.088
- 3708.41
- 3919.78
- 3946.42
- 3960.93
- 3995.6
- 4125.28
- 4180.38
- 4262.0
- 4296.28
- 4323.4
- 4358.44

Fermi-Kurie plot

Nel caso delle **transizioni permesse** ($S(p, q)=1$) si ha

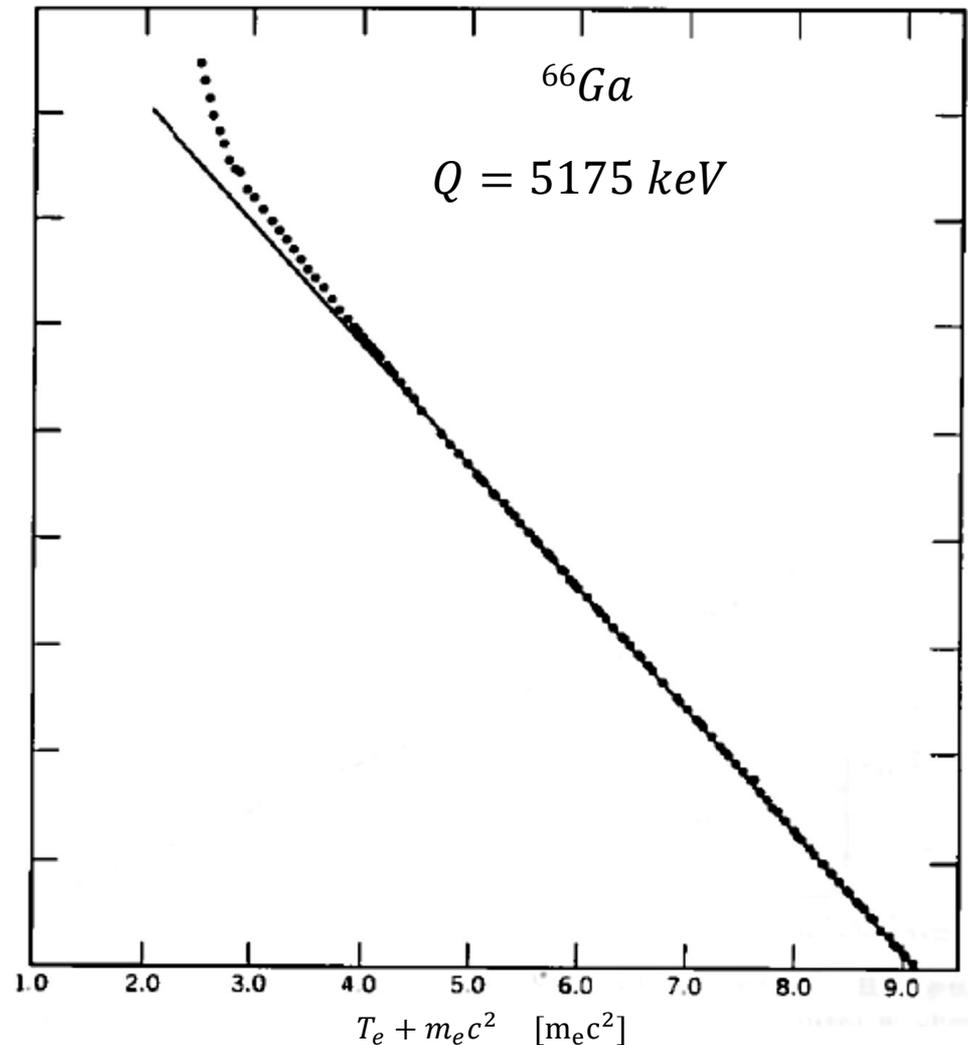
$$N(p) \propto p^2 (Q - T_e)^2 F(Z', p) S(p, q)$$

$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z', p)}} \propto (Q - T_e)$$

$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z', p)}}$$

La natura lineare del Kurie plot:

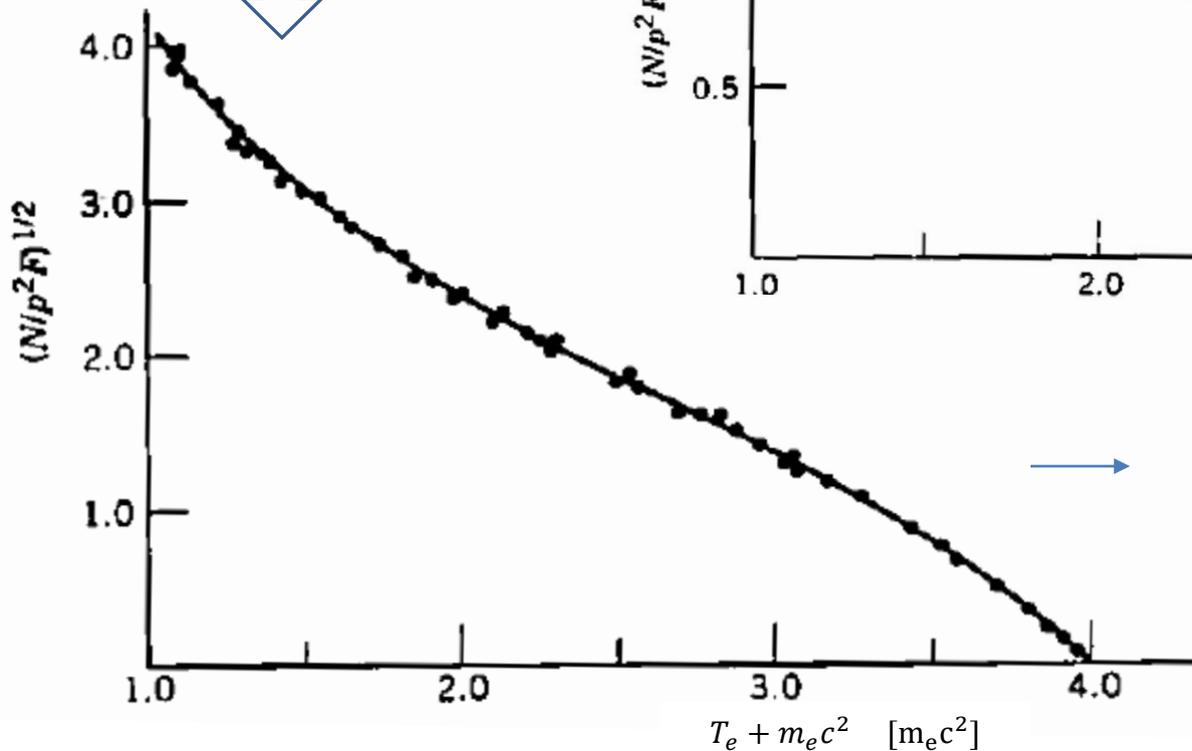
- ci dà fiducia nella teoria
- ci permette di determinare l'endpoint del decadimento



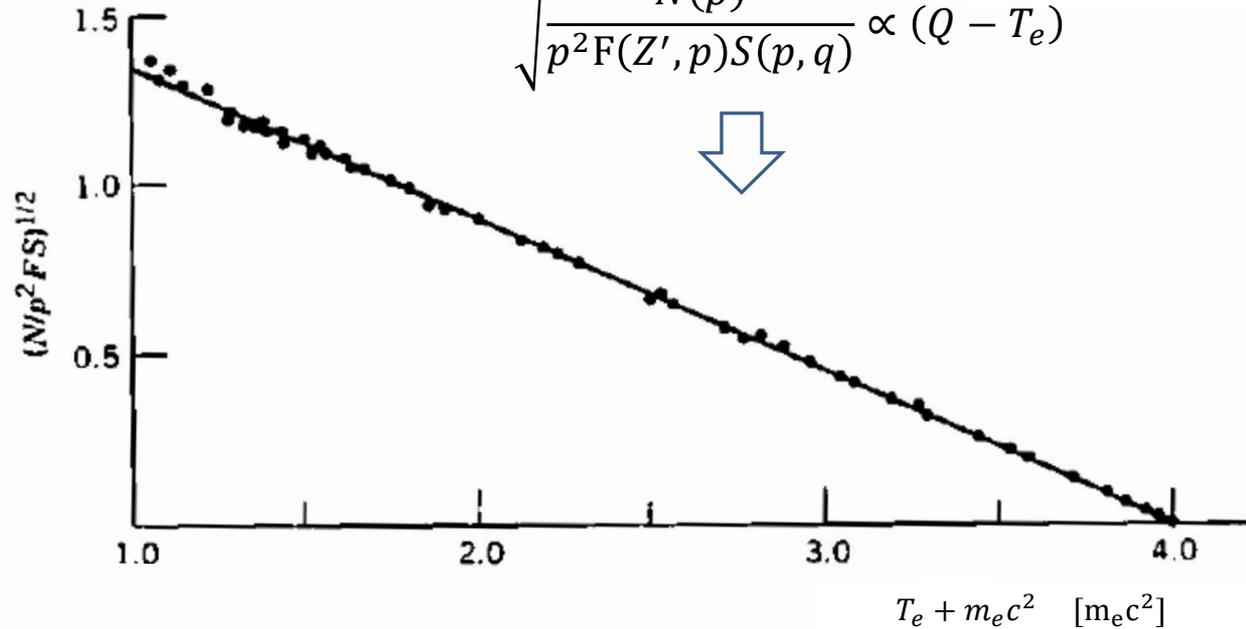
Fermi-Kurie plot

Nel caso delle **transizioni proibite** il fattore $S(p, q)$ (shape factor) permette di linearizzare la relazione

$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z', p)}} \propto (Q - T_e)$$



$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z', p) S(p, q)}} \propto (Q - T_e)$$



La forma dello shape factor $S(p, q)$ che permette di linearizzare il Kurie plot ci dà informazioni sul tipo di transizione

Massa del neutrino

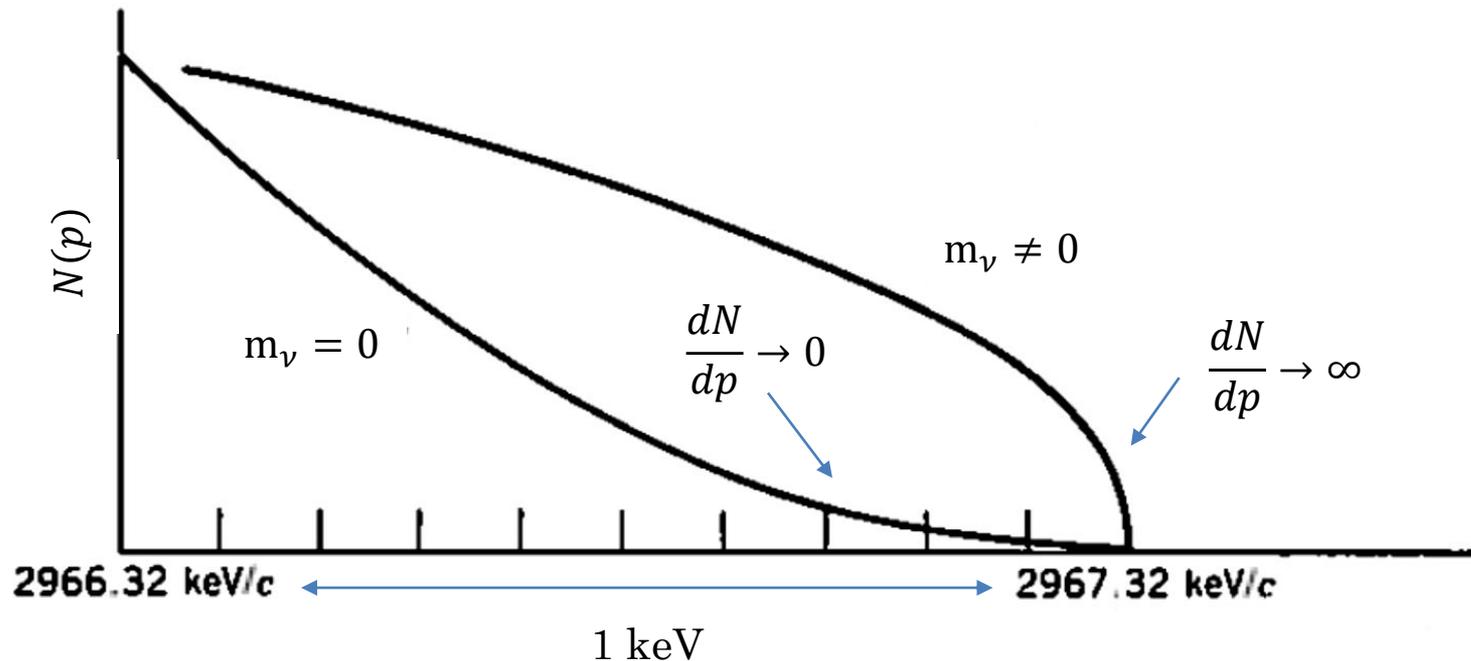
La teoria di Fermi si basa sull'assunzione che la massa del neutrino sia nulla.

Una massa non nulla del neutrino comporta:

- Variazione dell'endpoint dello spettro beta

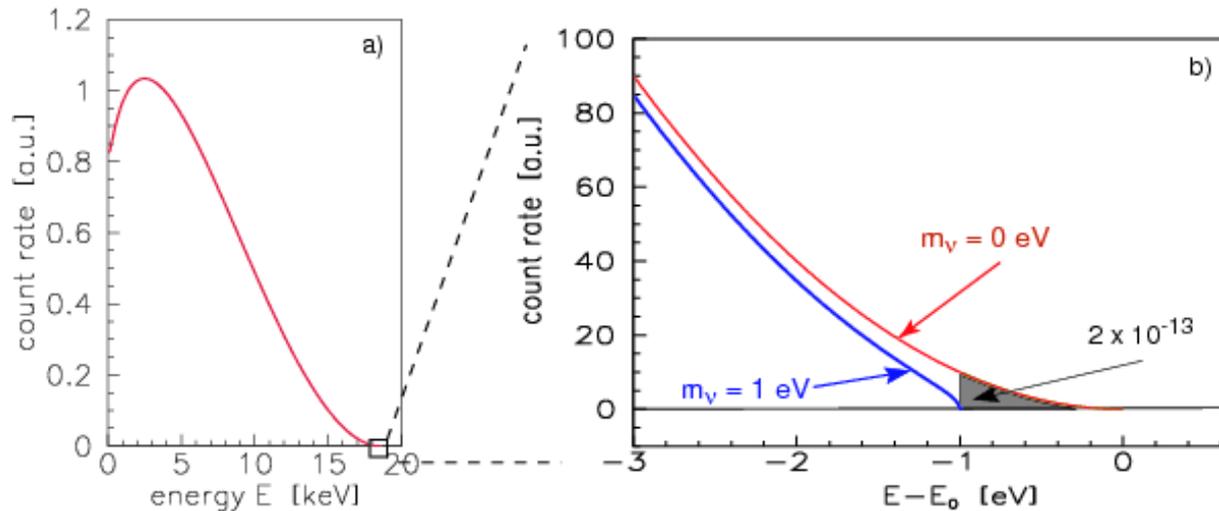
$$\text{Se } m_\nu \neq 0 \rightarrow Q = T_e + E_\nu = T_e + T_\nu + m_\nu \rightarrow Q' = T_e + T_\nu = Q - m_\nu$$

- Differente forma della shape dello spettro vicino all'endpoint

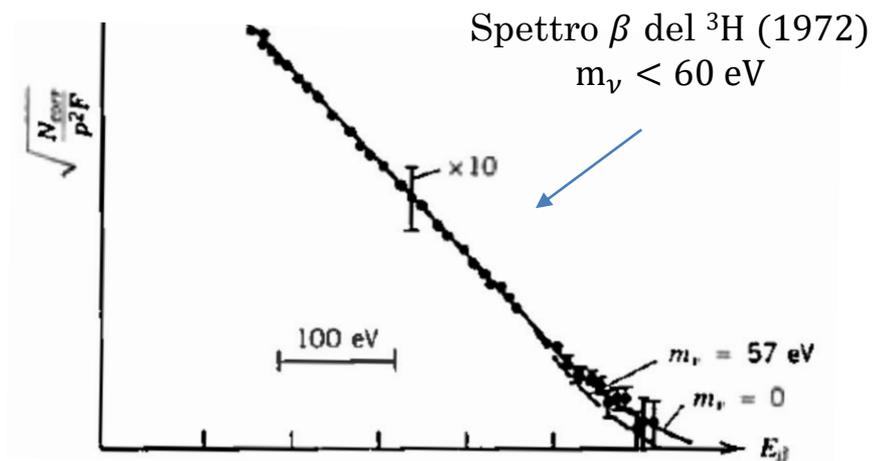
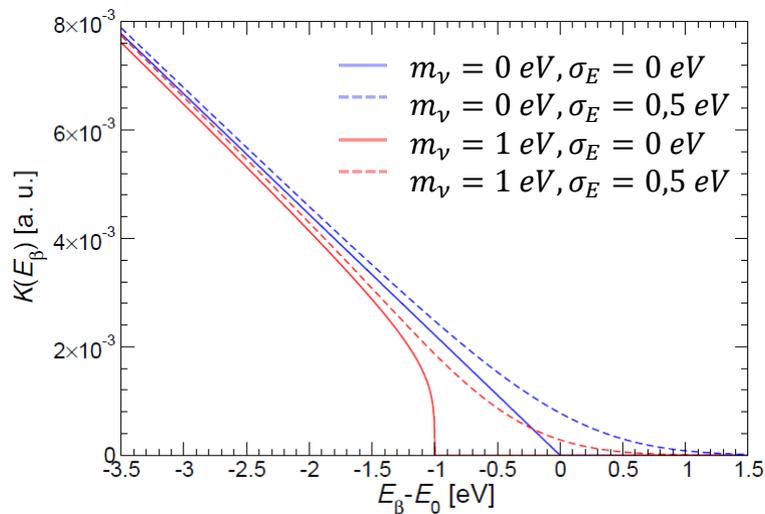


Massa del neutrino - esperimenti

Dal punto di vista sperimentale questa è una misura molto complicata soprattutto perché la **frazione di eventi all'endpoint** è molto piccola ed inoltre servono rivelatori con **risoluzione energetica** molto buona.



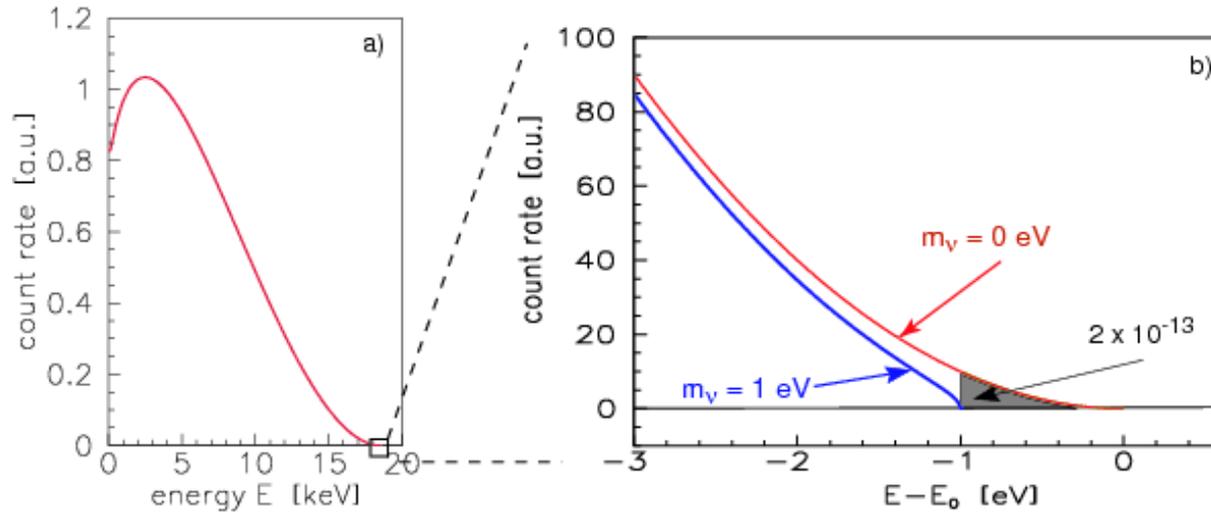
Sperimentalmente....



Massa del neutrino - esperimenti

Numero di eventi nella parte finale dello spettro:

$$\frac{N(\Delta E)}{N_{tot}} \propto \left(\frac{\Delta E}{Q}\right)^3$$



Per il trizio (${}^3\text{H}$, $Q = 18,6$ keV) 1 evento ogni 10^{12} se voglio studiare ultimi 2 eV...

Massa del neutrino - esperimenti

Ad oggi diversi esperimenti cercano di misurare la massa del neutrino attraverso lo studio dello spettro beta (o cattura elettronica).

Un paio di esempi:

KATRIN (3H)



spettrometro

$$Q = 18,6 \text{ keV}$$

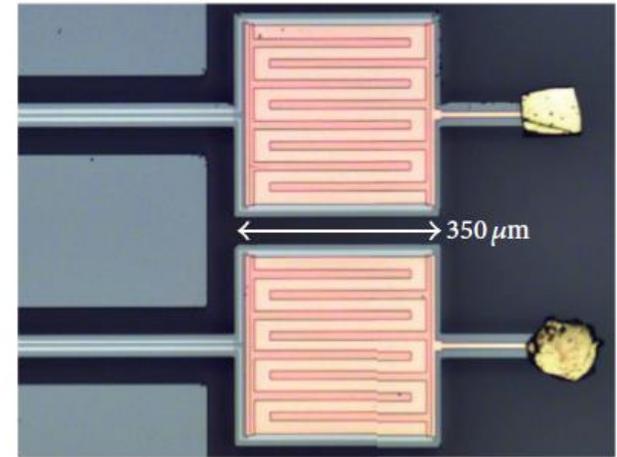
$$\text{Goal} \rightarrow m_\nu < 0,3 \text{ eV}$$

Risultati 2021: $m_\nu < 0,9 \text{ eV}$

HOLMES (${}^{163}Ho$)

$$Q = 2,5 \text{ keV}$$

$$\text{Goal} \rightarrow m_\nu < 0,4 \text{ eV}$$



Temperature criogeniche
(mK)

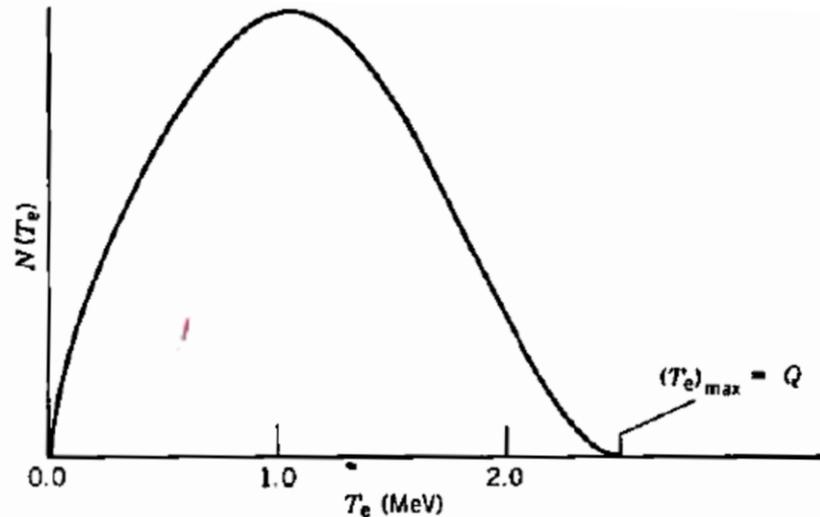
Grande interesse nella massa del neutrino perché la sua misura avrebbe implicazioni in:

- cosmologia (componente Dark Matter)
- particelle (oscillazioni neutrini, Decadimento Beta Doppio senza neutrini)

Teoria di Fermi

Se integro su tutte le energie dell'elettroni ottengo λ (trascuriamo per ora la funzione di Fermi $\mathbf{F}(\mathbf{Z}', \mathbf{p})$ e lo shape factor $\mathbf{S}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$)

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} = \int_0^{T_{max}} \frac{C}{c^5} (T_e^2 + 2T_e m_e c^2)^{\frac{1}{2}} (Q - T_e)^2 (T_e + m_e c^2) \propto \text{polinomio in } E \text{ (} E^5 \text{)}$$



Dipendenza meno forte di quella vista nei decadimenti alfa
dove avevamo dipendenza esponenziale.

Teoria di Fermi - Decay Rate

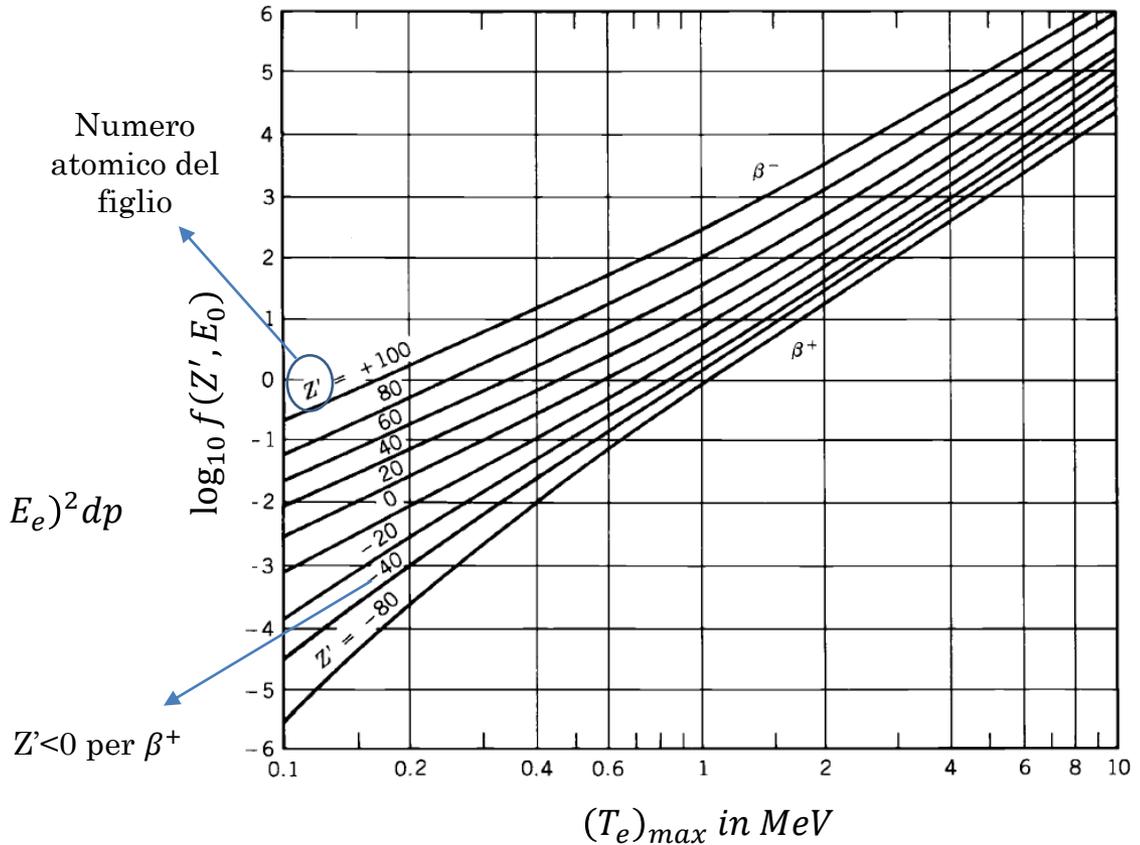
Per determinare il tasso di decadimento β è necessario integrare su tutti i possibili valori del momento del β

$$\lambda = \int d\lambda(p) = \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{max}} F(Z', p) p^2 (Q - T_e)^2 dp$$

valori tabulati
~ Integrale di Fermi f

Per convenzione, integrale di Fermi adimensionale

$$f(Z', E_0) = \frac{1}{m_e^5 c^7} \int_0^{p_{max}} F(Z', p) p^2 (E_0 - E_e)^2 dp$$



Teoria di Fermi - Decay Rate

Spesso si introduce la grandezza

$$\begin{array}{c} ft \text{ value} \\ \circ \\ \text{comparative half-live} \end{array} \longrightarrow ft_{1/2} = f \frac{\ln 2}{\lambda} = 0,693 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m_e^5 c^4 |M_{fi}|^2}$$

Permette di confrontare differenti elementi di matrice nucleare e quindi studiare le differenti funzioni d'onda nucleari (non dipende da Z' e E_0)

perché la dipendenza da Z' e E_0 è nell'integrale di Fermi f

I decadimenti β hanno tempi di dimezzamento molto differenti tra loro

$$ft \text{ tra } \sim 10^3 - 10^{20} \text{ s} \longrightarrow \log_{10} ft \sim 3 - 20$$

Se $\log_{10} ft \sim 3 - 4 \longrightarrow$ **Superallowed decay**

Se $\log_{10} ft \sim 6 - 9 \longrightarrow$ **1° proibita**

Se $\log_{10} ft \sim 10 - 13 \longrightarrow$ **2° proibita**

Regole di selezione - Allowed decays

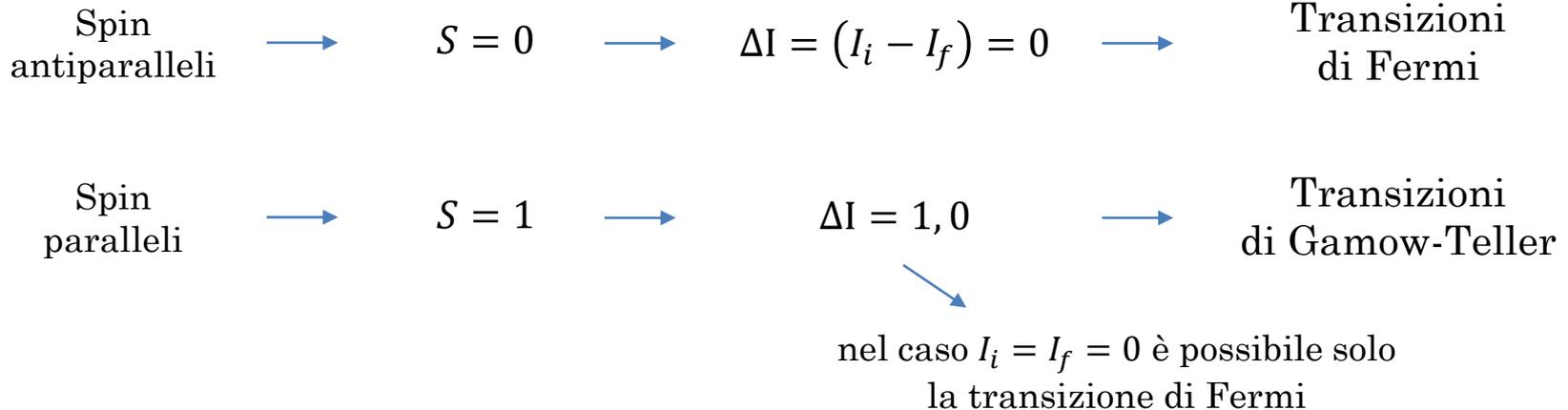
Ricordiamo che nel calcolo della matrice nucleare abbiamo utilizzato la seguente approssimazione (sia per e^- che per ν):

$$\phi_e(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \longrightarrow e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} = 1 + i \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar} + \frac{1}{2} \frac{(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})^2}{\hbar^2} + \dots \cong 1 \longrightarrow \phi_e(r) = \phi_\nu(r) = \frac{1}{\sqrt{V}}$$

permissa
1° proibita
2° proibita

Analizziamo quindi la variazione del momento angolare totale considerando il solo caso delle transizioni permesse:

Dato che in questa approssimazione e^- e ν **non hanno momento angolare orbitale** ($l = 0$) la variazione del momento angolare del nucleo ΔI può essere **dovuta solamente a spin di e^- e ν** (entrambi = 1/2)



Regole di selezione - Allowed decays

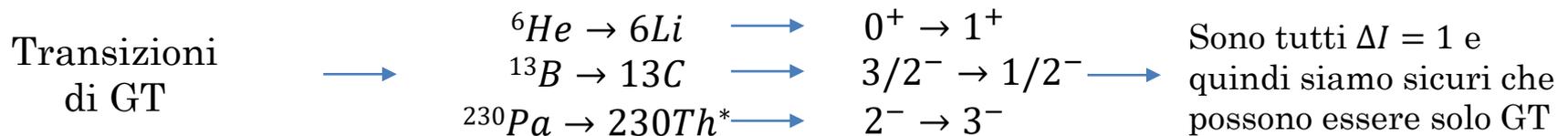
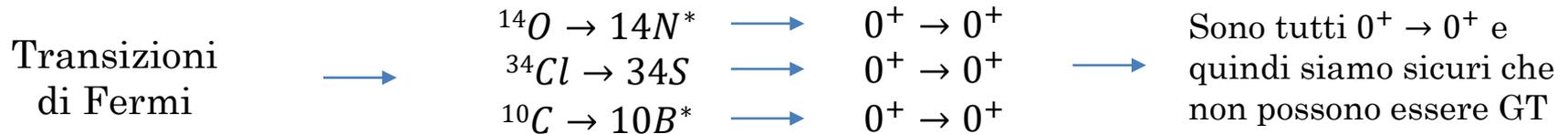
Se e^- e ν **non** hanno momento angolare allora la parità dello stato iniziale e finale devono essere la stessa perchè la parità associata al momento angolare vale $(-1)^l$

$$l = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta\pi = +1 \text{ (no cambio parità)}$$

Per i decadimenti β permessi abbiamo quindi le seguenti

$$\text{Regole di Selezione per i decadimenti permessi} \quad \longrightarrow \quad \Delta I = 0, 1 \quad \Delta\pi = +1$$

Alcuni esempi:



Sia le condizioni GT che F sono soddisfatte

Rapporto tra ampiezza GT e ampiezza Fermi

$$y = \frac{g_f M_F}{g_{GT} M_{GT}}$$

Per calcolo rate decadimento $g^2 |M_{fi}|^2 \rightarrow g_F^2 |M_F|^2 + g_{GT}^2 |M_{GT}|^2$

Regole di selezione - Forbidden decays

Le transizioni definite ‘**proibite**’ ($l \neq 0$) in realtà non sono proibite. Spesso sono **meno probabili** (quindi τ più grandi) ma in alcuni casi, se l’elemento di matrice delle transizioni permesse si annulla, possono essere l’unico tipo di decadimento.

$$e^{ip \cdot r / \hbar} = 1 + i \frac{p \cdot r}{\hbar} + \frac{1}{2} \frac{(i p \cdot r)^2}{\hbar^2} + \dots \cong 1$$

permissa 1° proibita 2° proibita

Anche nel caso delle transizioni proibite si distingue tra transizioni di Fermi e Transizioni Gamow-Teller

				$(-1)^l$
1° proibita	$l = 1$	$S = 0$ $S = 1$	$\Delta I = 0, 1$ $\Delta I = 0, 1, 2$	$\pi_i \pi_f = -1$
2° proibita	$l = 2$	$S = 0$ $S = 1$	$\Delta I = 0, 1, 2$ $\Delta I = 0, 1, 2, 3$	$\pi_i \pi_f = +1$
3° proibita	$l = 3$	$S = 0$ $S = 1$	$\Delta I = 0, 1, 2, 3$ $\Delta I = 0, 1, 2, 3, 4$	$\pi_i \pi_f = -1$

Transizioni proibite con $\Delta I = 0, 1$ sono soppresse di fattori $10^3 - 10^6$ quindi sono dominate da quelle permesse dato che ad ogni ordine la probabilità cala.



Si evidenziano solo i casi di transizioni soppresse con $\Delta I \geq 2$

Regole di selezione - Forbidden decays

Le transizioni definite 'proibite' ($l \neq 0$) in realtà non sono proibite. Spesso sono **meno probabili** (quindi τ più grandi) ma in alcuni casi, se l'elemento di matrice delle transizioni permesse si annulla, possono essere l'unico tipo di decadimento.

Anche nel caso delle transizioni proibite si distingue tra transizioni di Fermi e Transizioni Gamow-Teller

$$e^{ip \cdot r / \hbar} = 1 + i \frac{p \cdot r}{\hbar} + \frac{1}{2} \frac{(i p \cdot r)^2}{\hbar^2} + \dots \cong 1$$

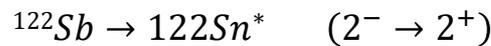
permessa

1° proibita

2° proibita

Alcuni esempi

1° proibita



$$\pi_i \pi_f = -1$$

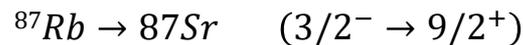
$$(-1)^l$$

2° proibita



$$\pi_i \pi_f = +1$$

3° proibita



$$\pi_i \pi_f = -1$$

Transizioni proibite con $\Delta I = 0, 1$ sono sopresse di fattori $10^3 - 10^6$ quindi sono dominate da quelle permesse dato che ad ogni ordine la probabilità cala.



Si evidenziano solo i casi di transizioni sopresse con $\Delta I \geq 2$

Regole di selezione - Forbidden decays vs half-lives

I decadimenti β hanno vite che vanno dai ms a $10^{16} y$



Tale differenze è legata alla difficoltà di creare un ν e e^- in uno stato di momento angolare $l > 0$

$$e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} = 1 + i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar} + \frac{1}{2}\frac{(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})^2}{\hbar^2} + \dots \cong 1$$

↓
permessa

↓
1° proibita - ampiezza $\sim 10^{-2}$ → Probabilità $\sim 10^{-4}$ rispetto a permessa

↓
2° proibita - ampiezza $\sim 10^{-4}$ → Probabilità $\sim 10^{-8}$ rispetto a permessa

In generale:

permessa → $\log_{10} ft \sim 3,5 - 7,5$

1° proibita → $\log_{10} ft \sim 6 - 9$

2° proibita → $\log_{10} ft \sim 10 - 13$

3° proibita → $\log_{10} ft \sim 14 - 20$

4° proibita → $\log_{10} ft \sim 23$



Misura di $\log_{10} ft$ (da $\lambda = 0,693/\tau_{1/2}$) consente predizione di spin e parità

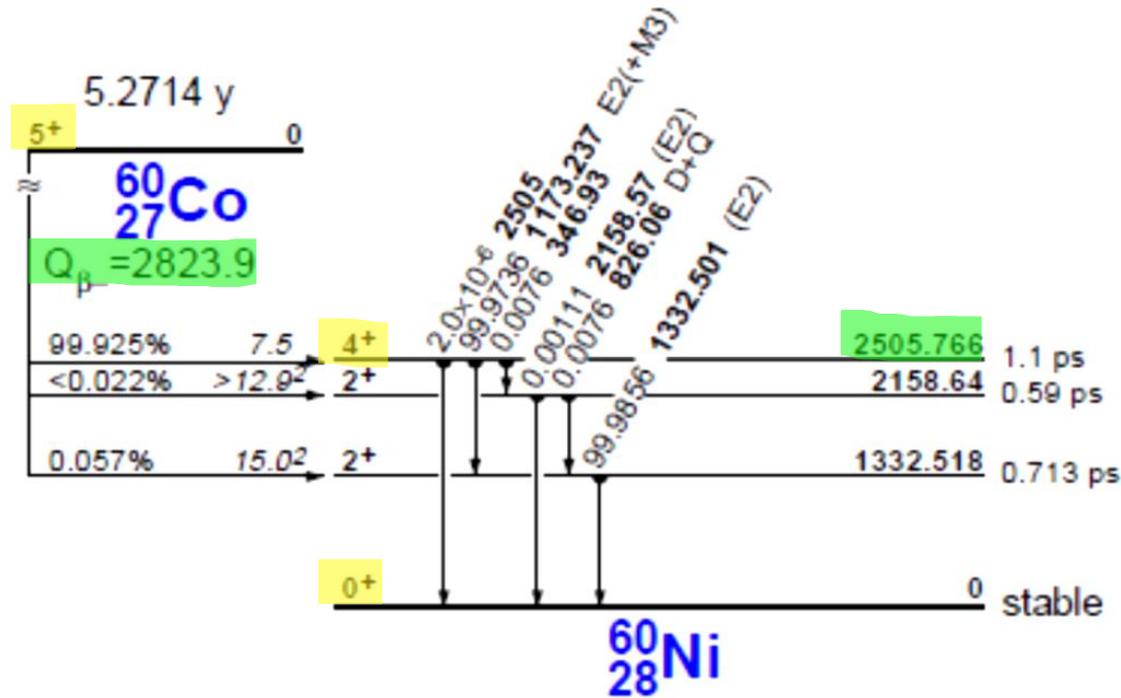
Regole di selezione - Forbidden decays vs half-lives

In alcuni casi è favorito il decadimento che implica un ΔI più piccolo rispetto a quelli con un'energia maggiore.

$$\lambda(E) \propto \text{polinomio in } E \text{ (} E^5 \text{)}$$



$\log_{10} ft \rightarrow$ soppressione per
decadimenti con $l \neq 0$



Decadimento Beta inverso

Solitamente non consideravamo il neutrino perché interagisce poco.... Ma se ho un rivelatore con una grande massa... Posso pensare al processo 'inverso' della cattura elettronica.



Ma cosa vuol dire 'grande massa'?

probabilità che la reazione avvenga per atomo bersaglio

$$\sigma = \frac{P}{f}$$

flusso di neutrini

Regola d'oro di Fermi

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar c} g^2 |M_{fi}|^2 \frac{4\pi p E}{h^3 c}$$

Consideriamo un neutrino con energia pari a 2.5 MeV $\longrightarrow \quad \sigma \cong 10^{-19} \text{ b} \cong 10^{-43} \text{ cm}^2$

Probabilità di interazione $\longrightarrow \quad W = \sigma \cdot N = 10^{-43} \text{ cm}^2 \cdot 10^{24} \text{ cm}^{-3} = 10^{-19} \text{ cm}^{-1}$

numero di protoni in 1 cm³ di materia

Un neutrino prima di interagire con un protone percorre $\sim 10^{19} \text{ cm} = 10^{14} \text{ km}!!!$

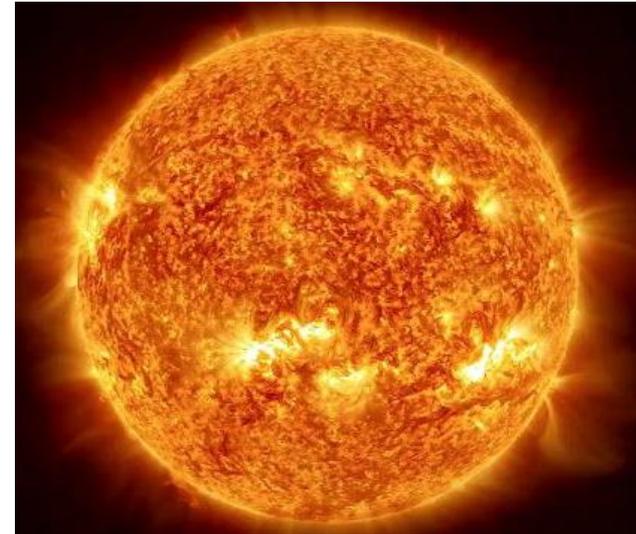
Fisica del neutrino

Un neutrino prima di interagire con un protone percorre $\sim 10^{19} \text{ cm} = 10^{14} \text{ km}!!!$



$$R_T \sim 6 \cdot 10^3 \text{ km}$$

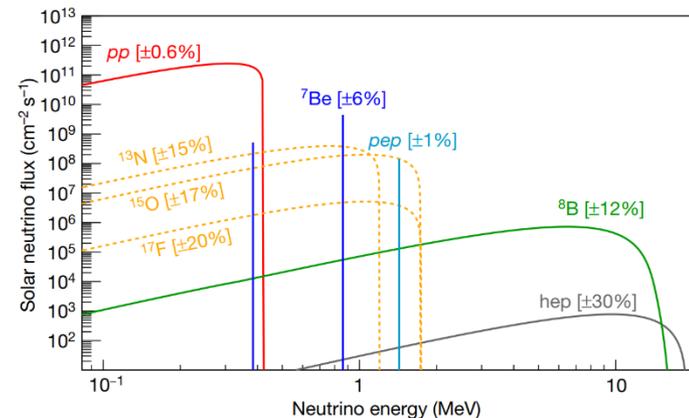
$$R_S \sim 7 \cdot 10^5 \text{ km}$$



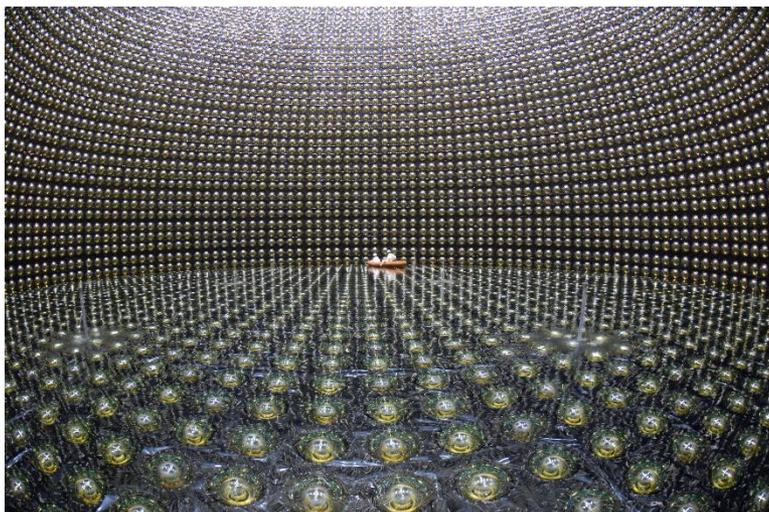
- I fotoni del sole che giungono a noi sono quelli prodotti sulla superficie.
- I neutrini prodotti al centro del sole a seguito delle reazioni di fusione riescono a giungere fino a noi.



Non posso studiare cosa succede al centro del sole con fotoni ma con neutrini sì!!!

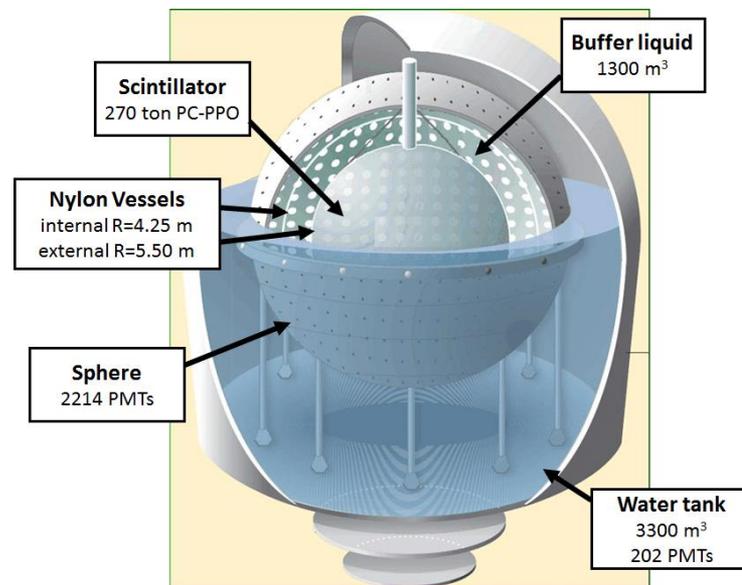
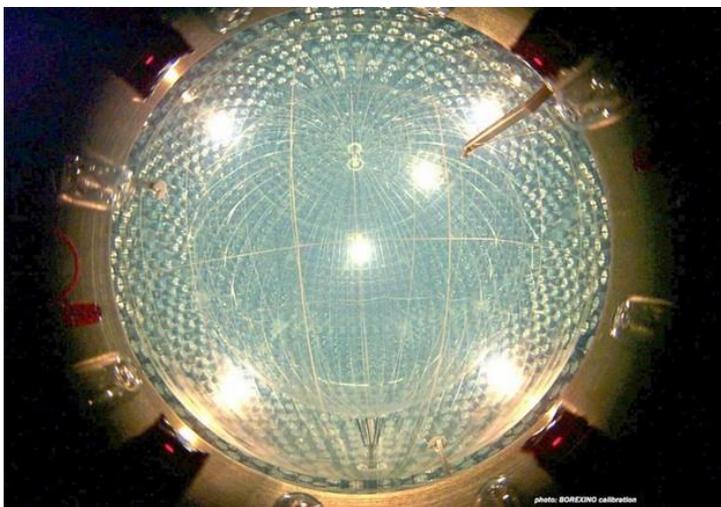


SUPER-KAMIOKANDE



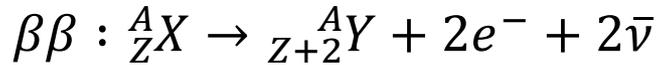
- Osservatorio di neutrini situato in Giappone
- 50.000 ton di acqua ultrapura circondate da 11.146 tubi fotomoltiplicatori.
- Struttura cilindrica, 41,4 m di altezza e 39,3 m di diametro.

BOREXINO – Gran Sasso



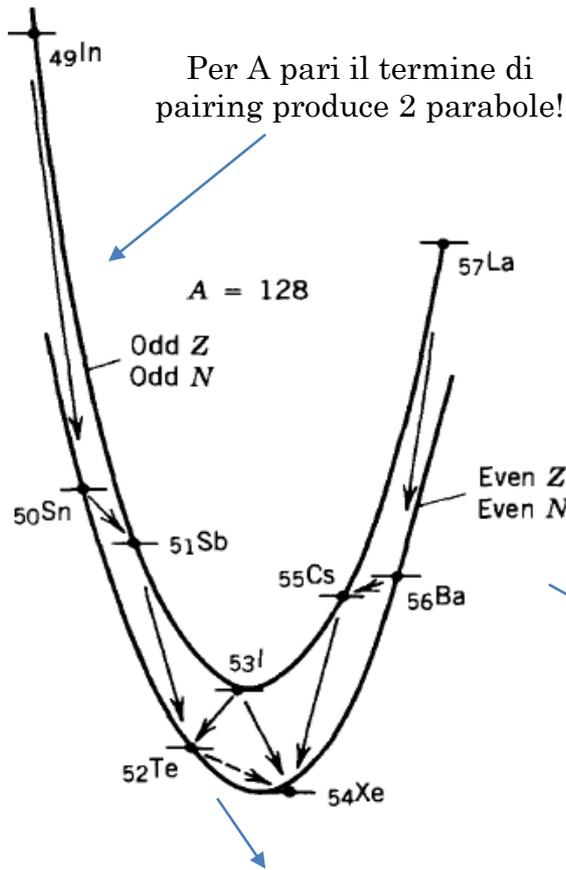
Decadimento Doppio Beta

Se il decadimento β è **proibito o fortemente soppresso** (regole di selezione, livelli energetici) allora risulta possibile osservare in alcuni nuclei il decadimento doppio beta ($\beta\beta$)

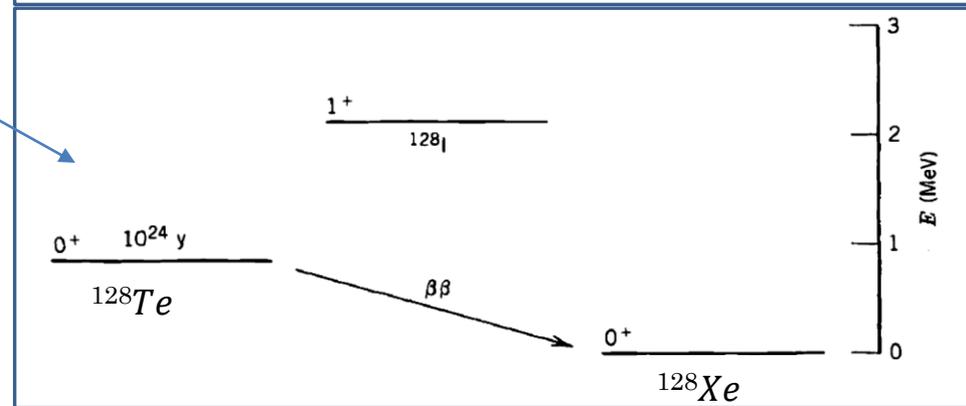
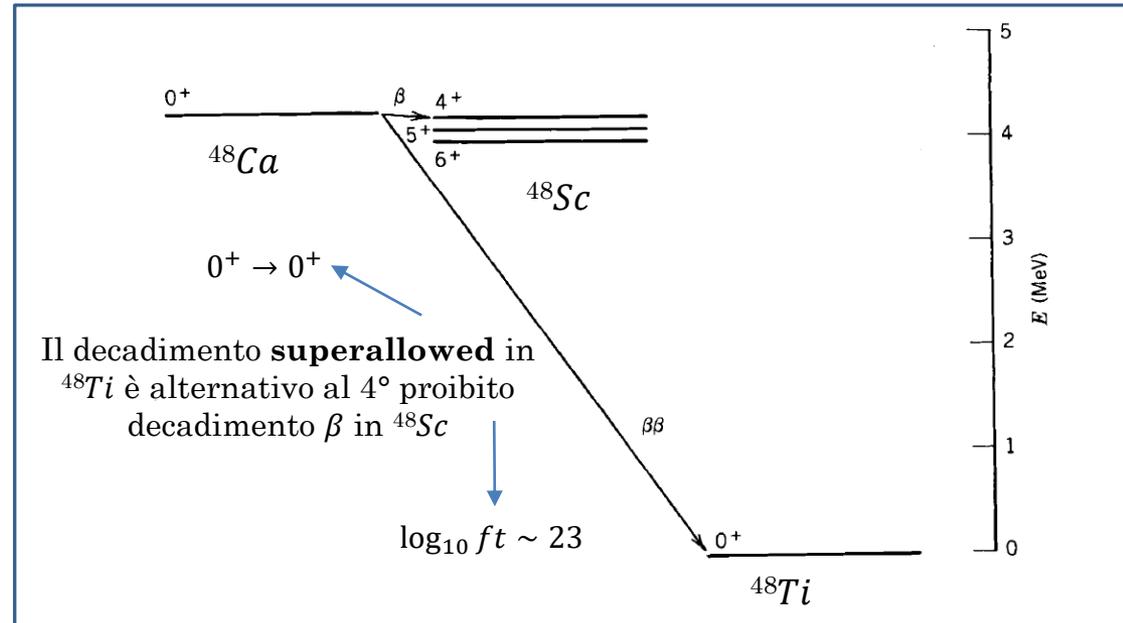


n.b. i nuclei che decadono β possono decadere anche $\beta\beta$ ma con tassi di decadimento molto più bassi (non osservabile sperimentalmente)

Alcuni esempi:



Decadimento β doppio



Decadimento Doppio Beta

Il decadimento doppio beta è un processo al secondo ordine quindi con probabilità molto più basse.

Vite medie $\sim 10^{18} - 10^{22}$ y

La misura del $\beta\beta$ può essere effettuata con:

- **Esperimenti geochimici**

Studio della concentrazione del figlio stabile del decadimento con spettroscopia di massa in minerali di età geologica conosciuta.

- **Esperimenti diretti**

Esperimenti in cui viene misurata l'energia trasferita agli elettroni nel decadimento. Molto complessi a causa delle vite medie molto lunghe.

E' necessario avere una sorgente con molti isotopi che possono decadere $\beta\beta$.

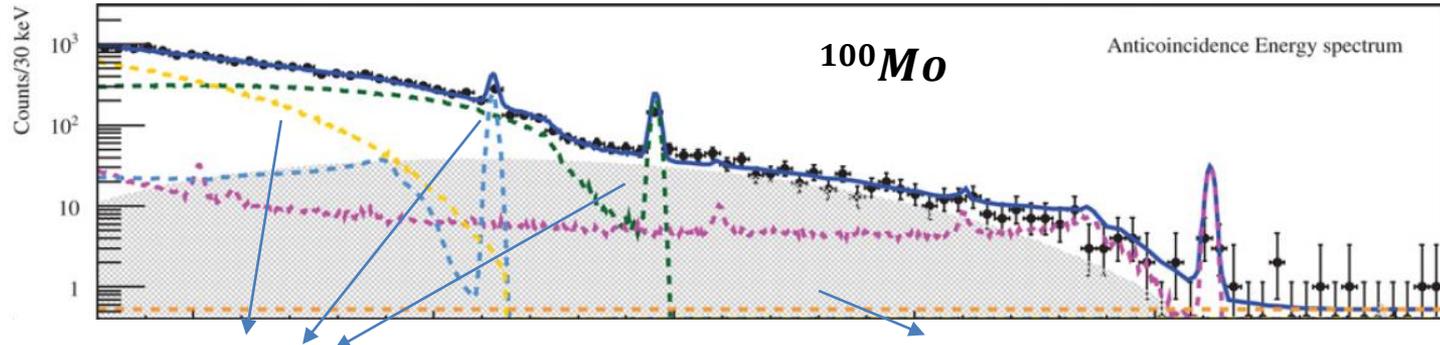
Isotope	$T_{1/2}(2\nu)$, yr
^{48}Ca	$4.4^{+0.6}_{-0.5} \times 10^{19}$
^{76}Ge	$1.65^{+0.14}_{-0.12} \times 10^{21}$
^{82}Se	$(0.92 \pm 0.07) \times 10^{20}$
^{96}Zr	$(2.3 \pm 0.2) \times 10^{19}$
^{100}Mo	$(7.1 \pm 0.4) \times 10^{18}$
$^{100}\text{Mo}-^{100}\text{Ru}(0_1^+)$	$6.7^{+0.5}_{-0.4} \times 10^{20}$
^{116}Cd	$(2.87 \pm 0.13) \times 10^{19}$
^{128}Te	$(2.0 \pm 0.3) \times 10^{24}$
^{130}Te	$(6.9 \pm 1.3) \times 10^{20}$
^{136}Xe	$(2.19 \pm 0.06) \times 10^{21}$
^{150}Nd	$(8.2 \pm 0.9) \times 10^{18}$

Alcuni degli isotopi di cui è stato misurato il $\beta\beta$

Nonostante sia un metodo estremamente complicato, numerosi esperimenti diretti per il $\beta\beta$ senza emissione di neutrini.

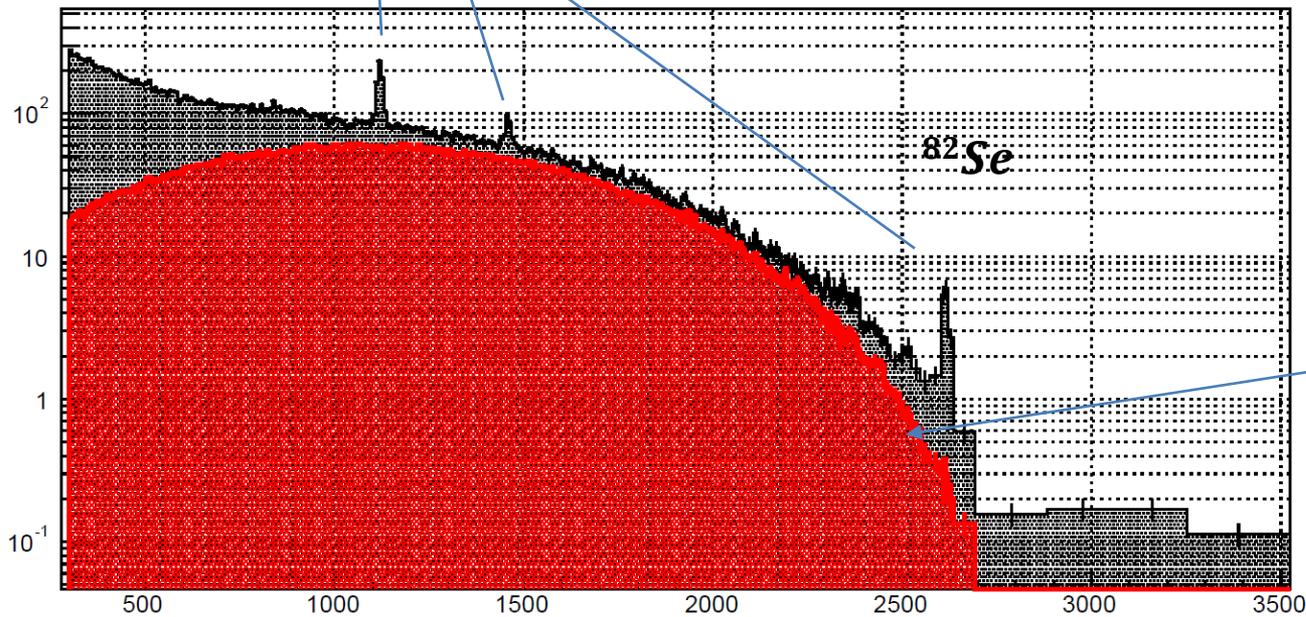
Decadimento Doppio Beta

Alcuni esempi di misure dirette del $\beta\beta$



Eventi dovuti a contaminazioni radioattive dei materiali interni/esterni al rivelatore

$$\tau_{\beta\beta} = 7,15 \cdot 10^{18} \text{ y}$$

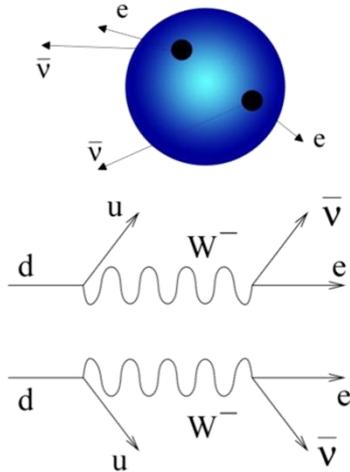
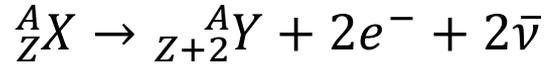


$$\tau_{\beta\beta} = 9 \cdot 10^{19} \text{ y}$$

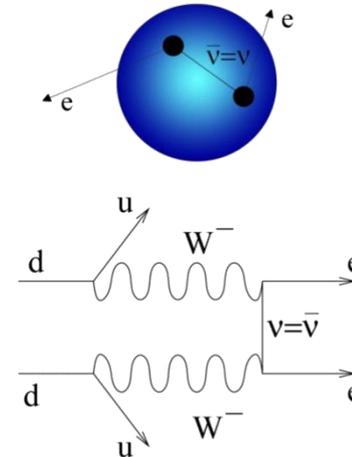
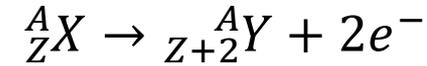
Decadimento Doppio Beta senza emissione di neutrini (0νDBD)

Un processo raro ($\tau_{1/2}^{0\nu} > 10^{25} \text{ y}$) cercato e non ancora osservato da diversi esperimenti è il 0νDBD

$2\nu\beta\beta$



$0\nu\beta\beta$



Diversi esperimenti per cercare questo processo perché:

- Il neutrino deve essere una particella con massa non nulla ed inoltre

$$\left(\tau_{1/2}^{0\nu\beta\beta}\right)^{-1} = G^0(Q, Z) |M^{0\nu}|^2 \frac{|\langle m_{\beta\beta} \rangle|^2}{m_e^2} \longrightarrow \text{massa efficace neutrino}$$

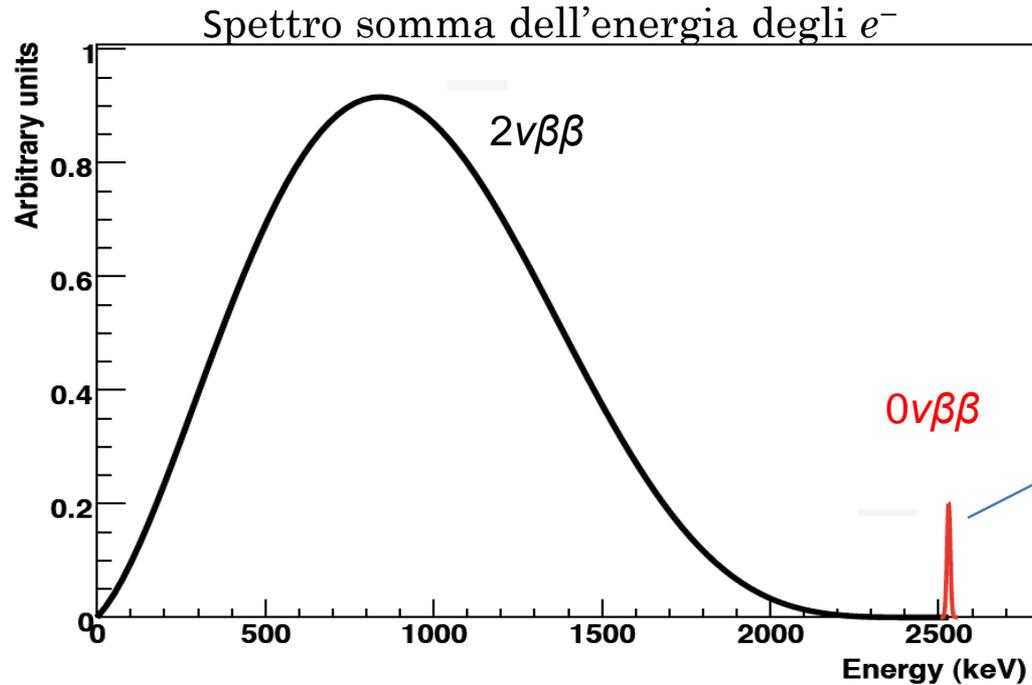
- Viola il numero leptonico ($\Delta L = 2$) → fisica oltre il **Modello Standard**
- Permette di studiare la **natura del neutrino**: Dirac or Majorana

$$\nu \neq \bar{\nu}$$

$$\nu \equiv \bar{\nu}$$

Decadimento Doppio Beta senza emissione di neutrini (0νDBD)

Gli esperimenti cercano un picco al Q valore della transizione



E necessario rivelare tutta l'energia trasferita agli e^-

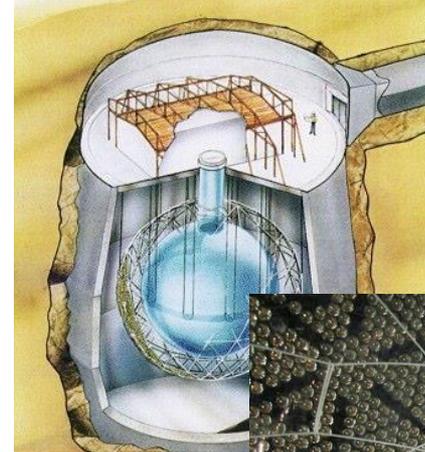
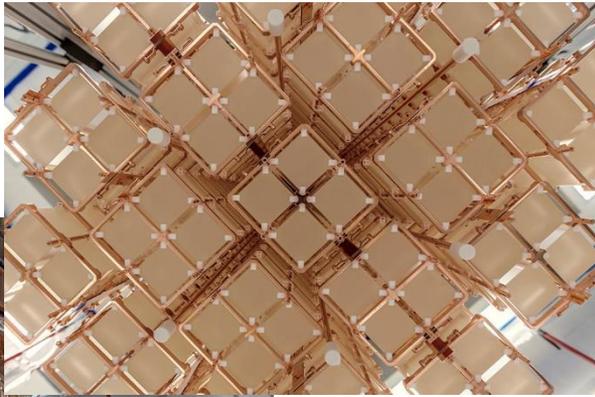
Grafico esemplificativo, il picco dovuto al $0\nu\beta\beta$ è molto molto più basso....

Tutti limiti!!!

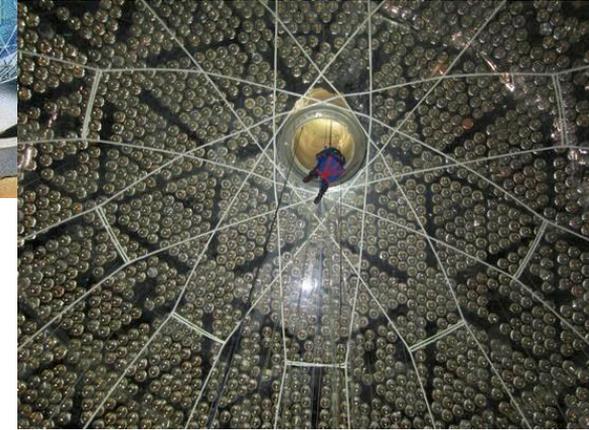
Isotopo	Esperimento	$Q_{\beta\beta}$	M isotopo $\beta\beta$	$\tau_{1/2}^{\beta\beta 0\nu}$
^{76}Ge	GERDA-I	2039 keV	15 kg	$> 2 \cdot 10^{25}$ y
^{100}Mo	NEMO-3	3034 keV	6,9 kg	$> 1 \cdot 10^{24}$ y
	CUPID-Mo		2,3 kg	$> 1,5 \cdot 10^{24}$ y
^{130}Te	CUORE	2528 keV	206 kg	$> 2,2 \cdot 10^{25}$ y
^{136}Xe	EXO-200	2458 keV	300 kg	$> 4 \cdot 10^{25}$ y
	KamLAND-Zen			

Decadimento Doppio Beta senza emissione di neutrini - exp

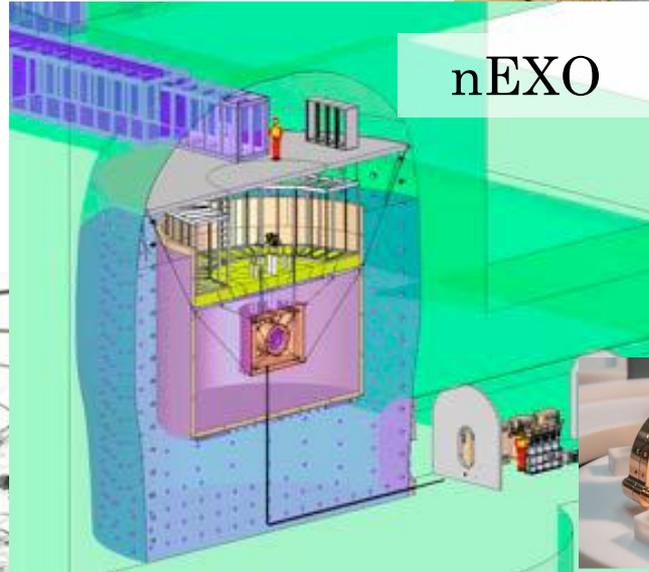
CUORE



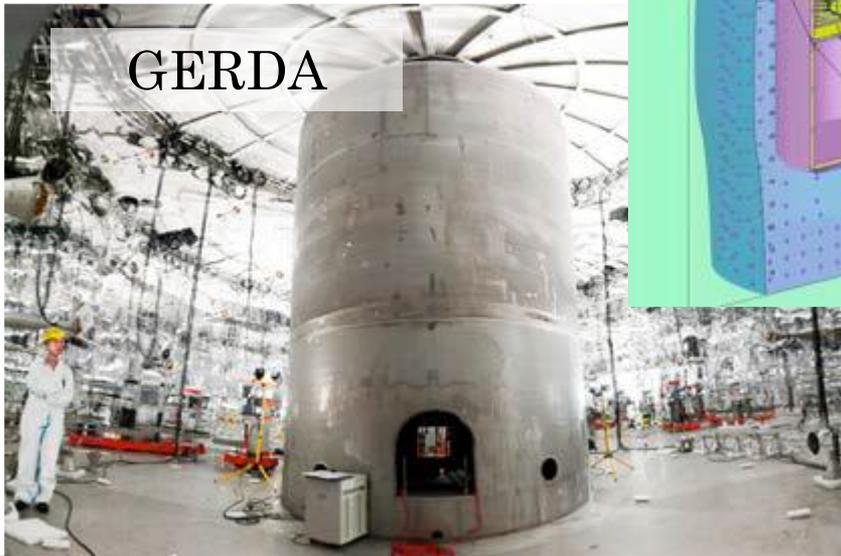
SNO+



nEXO



GERDA



CUPID



Positron Emission Tomography (PET)

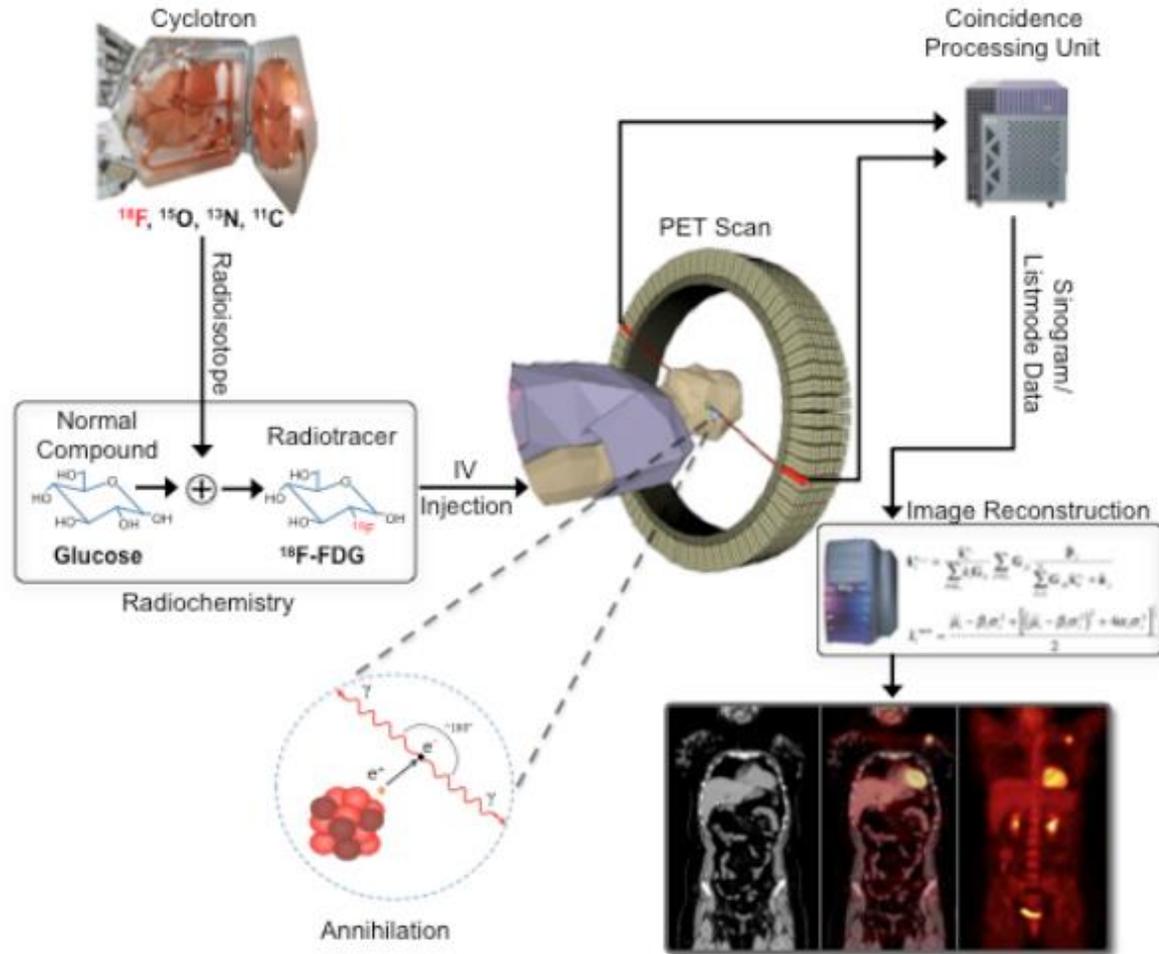
A differenza della risonanza magnetica nucleare, che guarda principalmente l'anatomia, la PET mostra la **funzione metabolica** e la fisiologia. La PET è utilizzata, ad esempio, in cardiologia, neurologia e oncologia.

Nella PET, il paziente riceve un radiofarmaco a breve **emivita** contenuto in una sostanza chimica utilizzata dall'organismo come il glucosio.

La PET consente al medico di vedere quindi la posizione di un processo metabolico.

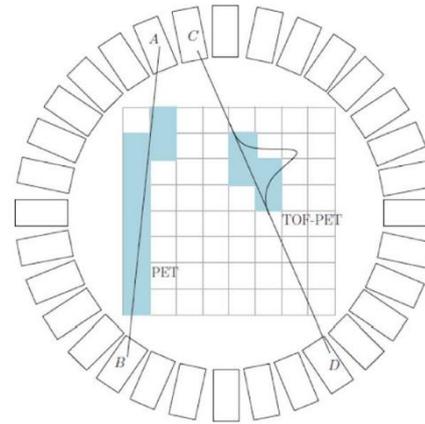
Mostra, ad esempio, dove viene utilizzato il glucosio nel cervello, nel muscolo cardiaco o in un tumore in crescita.

Le cellule tumorali utilizzano più energia (i.e. glucosio) delle altre cellule.

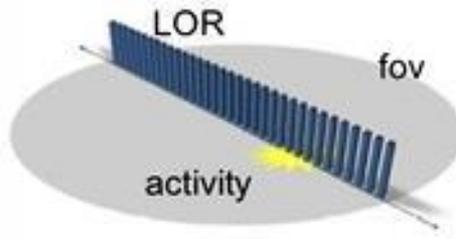


Positron Emission Tomography (PET)

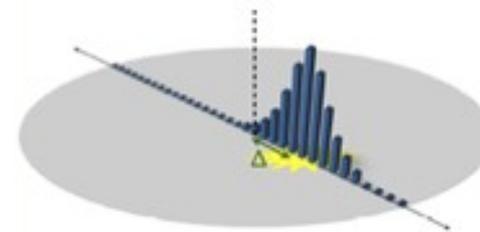
Time of Flight in PET (TOF)



Conventional PET



Time-of-flight PET

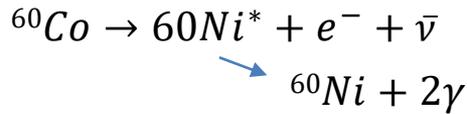


$$\Delta x = c \frac{\Delta t}{2}$$

Time resolution (ns)	Δx (cm)
0.1	1.5
0.3	4.5
0.6	9.0
1.2	18.0
2.7	40.0

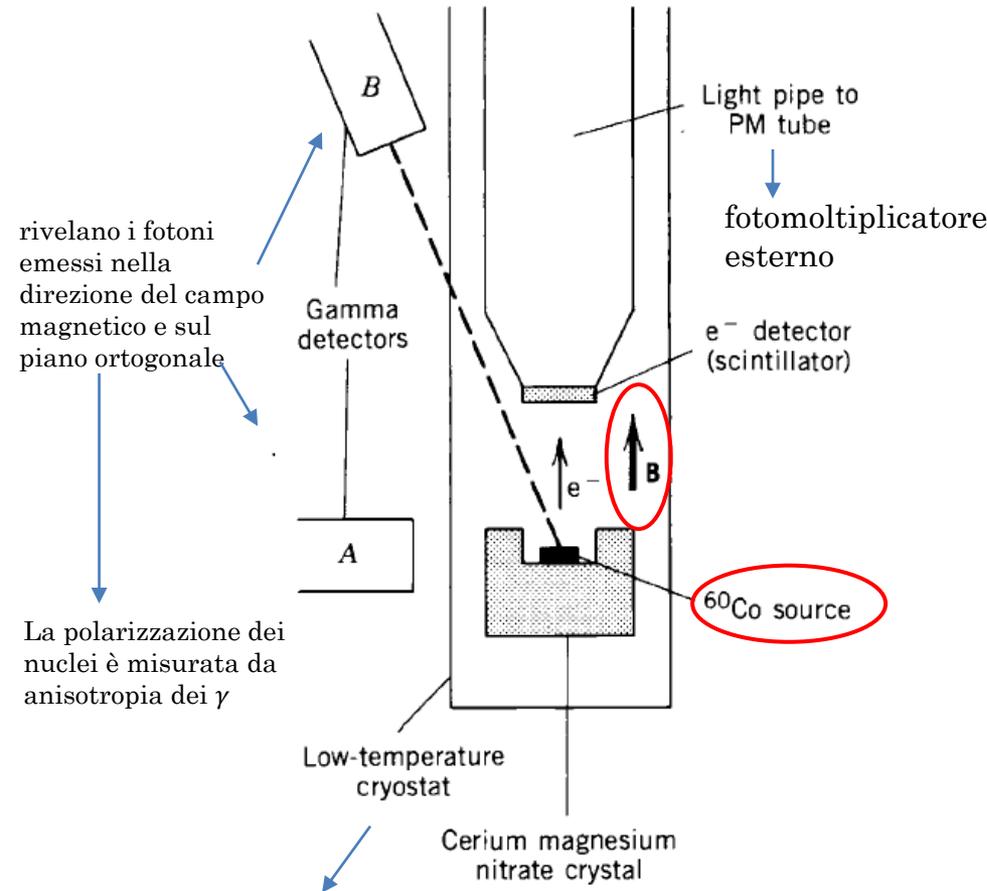
Emissione Beta e Parità

L'esperimento di Madame Wu nel 1957 dimostrò che i decadimenti β non conservano la parità P.



e quindi l'interazione debole

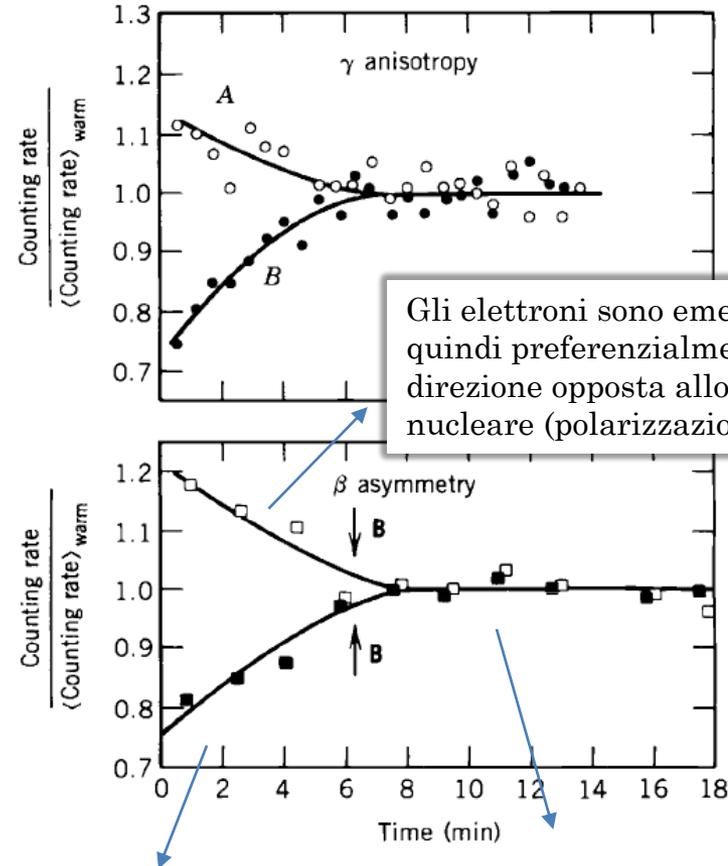
riflessione spaziale
 $r \rightarrow -r$



rivelano i fotoni emessi nella direzione del campo magnetico e sul piano ortogonale

La polarizzazione dei nuclei è misurata da anisotropia dei γ

$T \sim 0,01\text{ K}$ necessario affinché l'agitazione termica non distrugga l'allineamento



Gli elettroni sono emessi quindi preferenzialmente in direzione opposta allo spin nucleare (polarizzazione)

Se la parità è conservata ci aspettiamo un ugual numero di elettroni paralleli e antiparalleli a B (no asimmetria e le due curve coinciderebbero)

L'asimmetria sparisce a causa del riscaldamento della sorgente e la conseguente perdita di polarizzazione