

Corso di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

a.a. 2023-24 - codice corso **2223-1-F4001Q094** – 8 CFU = 56 ore

Docente: Andrea Calogero (andrea.calogero@unimib.it)

Pagina del corso <https://elearning.unimib.it/course/view.php?id=44766>

Programma definitivo del corso **2023/24** (in blu i modelli svolti)

1. INTRODUZIONE AL CONTROLLO OTTIMO

a. Formulazione di un problema di controllo ottimo

Definizioni di controlli, dinamica, traiettorie, insieme di controllo, target set.

Funzioni assolutamente continue: definizione e proprietà. Soluzione di una equazione differenziale ordinaria con funzioni misurabili: definizione e teoremi di esistenza e unicità. Controlli ammissibili. Importanza del caso della dinamica lineare.

2. IL CONTROLLO OTTIMO CON IL METODO VARIAZIONALE

a. Il problema più semplice di controllo ottimo

Definizione di controllo ottimo. Il teorema di Pontryagin (DIM nel caso di insieme di controllo $U=R$, DIM anche del lemma tecnico): definizione di Hamiltoniana e conseguenze del principio del Massimo. Controllo estremale, moltiplicatore associato. Controllo normale e abnormal: esempi di controllo ottimo abnormal. Proprietà dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo (DIM, anche del lemma tecnico).

Problemi autonomi: proprietà dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo.

Funzioni concave, sopragradiente, sopragradiente di funzioni differenziabili, cenni al Teorema di Rockafellar. Condizioni sufficienti di ottimalità: il teorema di Mangasarian (DIM) e il teorema di Arrow (DIM) con Hamiltoniana massimizzante. Condizioni di transversalità per i problemi con punti iniziali/finali fissati. Sui problemi di minimo.

A two sector model with investment and consumption goods.

b. Il problema più semplice di calcolo delle variazioni

Il teorema di Eulero (DIM come caso particolare del teorema di Pontryagin). Condizioni di transversalità per i problemi con punti iniziali/finali fissati. Condizioni sufficienti per il problema più semplice usando concavità/convessità. *Curva di lunghezza minima.*

c. Controlli singolari e bang-bang

Definizioni di controlli bang-bang, istanti di commutazione e controlli singolari. *La costruzione di una strada di montagna a costo minimo.*

d. Problema più generali di controllo ottimo

Problemi di Mayer, di Bolza e Lagrange: loro equivalenza.

Problemi a tempo finale fisso: condizione necessaria e condizione sufficiente per il problema di Bolza; problemi autonomi. Problemi a tempo finale libero: nozione di tempo di uscita, condizione necessaria per il problema di Bolza; problemi autonomi. *The moon landing problem (risolto parzialmente: esiste di al più un istante di commutazione e costruzione della free fall curve e della switching curve).*

Problemi a tempo minimo: condizione necessaria. *In barca con Pontryagin.* Un problema a tempo minimo singolare: *the Dubin car.*

Problemi ad orizzonte infinito: controesempio di Halkin; condizione sufficiente di ottimalità (DIM). Hamiltoniana corrente, moltiplicatore corrente e loro condizioni necessarie (DIM) e sufficienti per problemi scontati. Funzioni di utilità, cenni alle funzioni quasi-concave, ogni funzione concava è quasi-concava (DIM). *Un modello di consumo ottimo con utilità logaritmica.*

e. Problemi di esistenza e controllabilità

Esempi di classe di controlli vuota o di classe di controlli non vuota e senza controllo ottimo (controesempio di Bolza). Disuguaglianza di Gronwall (DIM). Teorema di esistenza del controllo ottimo per i problemi di Bolza: il caso con insieme di controllo chiuso e il caso con insieme di controllo compatto.

3. CONTROLLO OTTIMO CON IL METODO DELLA PROGRAMMAZIONE DINAMICA

a. La funzione valore e le sue proprietà per il problema più semplice di controllo ottimo.

Definizione di funzione valore. Il principio di ottimalità di Bellman (DIM).

Le proprietà della funzione valore: la condizione (necessaria) finale sulla funzione valore (DIM), l'equazione di Bellman-Hamilton-Jacobi (BHJ) per funzione valore differenziabile (DIM). L'Hamiltoniana della Programmazione Dinamica. Condizioni sufficienti di ottimalità (DIM). L'equazione di BHJ lungo la traiettoria ottima (DIM). Sui problemi di minimo.

Soluzione del problema di strategia aziendale di produzione/vendita.

La funzione valore del problema a tempo finale fisso e traiettoria al tempo finale libera (sotto opportune ipotesi), è Lipschitz (DIM per problemi autonomi). Cenni al teorema di Rademacher: la funzione valore ammette derivate q.o. Un esempio di funzione valore discontinua.

Definizione di soluzione viscosa per il sistema di BHJ; in caso di regolarità, la nozione "classica" di soluzione e la nozione di soluzione viscosa per il sistema di BHJ sono equivalenti (DIM). La funzione valore del problema a tempo finale fisso e traiettoria al tempo finale libera (sotto opportune ipotesi), è l'unica soluzione viscosa per il sistema di BHJ (DIM, non dell'unicità). Un esempio soluzione viscosa per il sistema di BHJ.

b. Problemi più generali di controllo ottimo.

Definizione e insieme dei punti raggiungibili. Condizione necessaria e condizione sufficiente per problemi di controllo ottimo più generali. *Modello di produzione e gestione del magazzino.*

Problemi autonomi, ad orizzonte illimitato, scontati: la sua funzione valore corrente e la relativa equazione di BHJ (DIM).
Un modello di consumo ottimo con utilità HARA. Cenni al modello stocastico di Merton.

c. Legami tra i metodi variazionali e la Programmazione Dinamica.

Interpretazione del moltiplicatore come prezzo ombra (DIM).

4. GIOCHI DIFFERENZIALI

a. Nozioni introduttive

Concetti di soluzioni nella teoria dei giochi: equilibrio di Nash, cenni all'equilibrio di Stackelberg. Formulazione di un gioco differenziale a 2 giocatori. Giochi a somma zero. Strategie a ciclo aperto e strategie feedback. Game set e target set.

b. Equilibri di Nash per giochi generici a 2 giocatori

*Strategie open loop. Uso dell'approccio variazionale: condizione necessaria e condizione sufficiente per un equilibrio di Nash open-loop. *Il modello lavoratori-capitalisti di Lancaster.*

**Strategie feedback. Perché la tecnica variazione non è particolarmente utile (DIM). Condizione sufficiente con l'uso della programmazione dinamica per un equilibrio di Nash feedback. Cenni sulle funzioni valore per problemi giochi differenziali Affini-Quadratici a due giocatori e alla funzione valore corrente per giochi a orizzonte infinito e scontati. *Un problema di estrazione di risorse esauribili.*

c. Equilibri di Nash per giochi a somma zero

Equilibrio di Nash come punto di sella.

APPROCCIO VARIAZIONALE. Condizione necessaria e condizione sufficienti con l'approccio variazionale con strategia open-loop. Open-loop representation di una strategia feedback. Condizioni necessarie con l'approccio variazionale per la open-loop representation di una strategia feedback. *War of attrition and attack.*

APPROCCIO CON LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA VARIAZIONALE. Insieme dei controlli e insieme delle strategia non anticipative: esempio della strategia non anticipativa costante. Definizione di funzione valore inferiore V^- (superiore V^+): $V^+ \geq V^-$ (DIM "intuitiva"); un esempio di gioco con $V^+ > V^-$. Definizione di funzione valore V . Hamiltoniana inferiore della Programmazione Dinamica H_{-DP} (superiore H^+_{DP}): $H_{-DP} \leq H^+_{DP}$ (DIM); un esempio di gioco con $H_{-DP} < H^+_{DP}$. Condizione di Isaacs (o di minimax) e definizione di Hamiltoniana della Programmazione Dinamica H_{DP} .

*RISULTATI CON SOLUZIONI VISCOSE. V^- (V^+) è Lipschitz (sotto opportune ipotesi). V^- (V^+) è l'unica soluzione viscosa dell'equazione di Isaacs inferiore (superiore). La condizione di Isaacs garantisce che il problema ammette valore V ed è l'unica soluzione viscosa dell'equazione di Isaacs.

**RISULTATI CON SOLUZIONI REGOLARI. Condizione sufficiente per un equilibrio di Nash nelle strategie feedback, con l'ipotesi della condizione di Isaacs e di soluzione regolare dell'equazione di Isaacs. Una dimostrazione geometrica che, con l'ipotesi della condizione di Isaacs, V soddisfa l'equazione di Isaacs (DIM).

d. Giochi di cattura ed evasione

Formulazione di un gioco di cattura-evasione, target set, exit time. Proprietà dei giochi di cattura-evasione: la funzione valore inferiore V^- (superiore V^+) non dipende dal tempo, proprietà del game set, l'equazione inferiore (superiore) di Isaacs (DIM). Condizione sufficiente per un equilibrio di Nash nelle strategie feedback. *The lady in the lake.*

Materiale didattico del corso

[C1] A. Calogero "Notes on optimal control theory", disponibile sul sito del corso.

[C2] A. Calogero "A very short tour on differential games", disponibile sul sito del corso.

[C3] A. Calogero "Exercises of dynamic optimization", disponibile sul sito del corso.

Ulteriore materiale didattico:

[BO] T. Başar, G.O. Olsder "Dynamic noncooperative game theory", SIAM Classic in Applied Mathematics, 1998.

[B] A. Bressan "Noncooperative differential games. A Tutorial", Milan Journal of Mathematics, vol 79, pag 357-427, 2011.

[E] L.C. Evans "An introduction to mathematical optimal control theory", disponibile gratuitamente in rete.

[FR] W.H. Fleming, R.W. Rishel "Deterministic and stochastic optimal control", Springer-Verlag, 1975.

[SS] A. Seierstad, K Sydsæter "Optimal control theory with economics applications" Elsevier Science, 1987.

Modalità di esame

L'esame consiste in una prova scritta e un prova orale facoltativa (senza orale non si registrano voti superiori ai 27/30); l'ammissione alla prova orale è a discrezione del docente.

L'ESAME SCRITTO (3 ore) consiste in una prova sui seguenti argomenti:

- definizioni, teoremi, dimostrazioni (le dimostrazioni sono indicate con DIM) come da programma;
- modelli economici e non, come da programma;
- esercizi di controllo ottimo con metodo variazionale e con la programmazione dinamica. **Gli esercizi dell'esame scritto verranno scelti rigorosamente dalla lista [C3] presente sulla pagina del corso (escludendo gli esercizi del punto 1.8):** si consiglia di verificare periodicamente la lista.

L'ESAME ORALE è un approfondimento dell'elaborato scritto in data da concordarsi con il docente.