Esercizi misti (1)

Esercizio 1

La seguente tabella mostra il numero di uomini rimasti vivi dopo ogni decade a partire da un gruppo di 1000 nati (tabella di sopravvivenza)

età	n. sopravissuti
0	1000
10	959
20	952
30	938
40	920
50	876
60	758
70	524
80	211
90	22
100	0

1) Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso sopravviva fino a 10 anni?
2) Qual è invece la probabilità che un individuo muoia prima dei 10 anni?
3) Qual è la probabilità che un individuo di 60 anni sopravviva fino a 70?
4) Qual è la probabilità che due individui di 60 anni sopravvivano fino a 70?
5) Se abbiamo 100 individui di 60 anni, quanti di essi ci aspettiamo che raggiungano i 70 anni?

Soluzioni

1)	959/1000=	0.959	
2)	1-0.959=	0.041	(eventi mutualmente esclusivi)
3)	524/758=	0.691	
4)	0.691*0.691=	0.478	(eventi indipendenti)
5)	100*0.691=	69	

Esercizio 2

Si considerino 100000 individui asintomatici, di cui 10000 affetti da malattia (M+).

Per diagnosticare la malattia utilizziamo un test che ha **Se=Sp=90%**

1. Calcolare il numero di **veri positivi** e **falsi positivi**.

   Qual è la probabilità che un individuo sia malato in presenza di un test positivo?

2. Qual è la **prevalenza** della malattia?
3. Qual è la **prevalenza** di malattia **misurata** dal test?

Risposte

	M+	M-	
T+	a	b	a+b
T-	c	d	c+d
	a+c	b+d	n

1) I veri positivi sono 9000, i falsi positivi sono 9000 e il VPP=0.5
2) La prevalenza di malattia è 0.10
3) La prevalenza di malattia misurata dal test è 0.18

	M+	M-	
T+	9000	9000	18000
T-	1000	81000	82000
	10000	90000	100000

Esercizio 3

Un marcatore M ha distribuzione Gaussiana. Per la popolazione dei soggetti *affetti* da una patologia P, la distribuzione di M ha μ=20 e σ=2. Il marcatore M è utilizzato per diagnosticare la patologia P (valori alti indicano presenza di malattia).

- Quale soglia per M è necessario utilizzare per avere una sensibilità pari a 0.8?
- La distribuzione di M per la popolazione dei soggetti *sani* ha una media inferiore a quella dei soggetti malati, ed ha la stessa deviazione standard. Utilizzando la soglia ricavata al punto a) si ottiene una specificità pari a 0.75. Qual è la media della popolazione dei soggetti *sani*?
- Il test diagnostico è utilizzato su un campione di 800 soggetti estratti da una popolazione in cui la prevalenza della patologia P è pari al 40%. Quanti soggetti falsi positivi ci si attende di trovare nel campione?

Risposte

- SENSIBILITÀ: 0.8 = P (test positivo | malato) = P[(X-20)/2] → per M è necessario utilizzare la soglia (M-20)/2 = - 0.84 → M = 18.32.
- SPECIFICITÀ: P (test negativo | sano) = (18.32-media)/2 = 0.67 → media=-(1.34-18.32)= 16.98.
- → : ci si attende di trovare 120 soggetti falsi positivi.

Esercizio 4

Devo stimare il valor medio della transferrina sierica in una popolazione di riferimento. È noto che in tale popolazione la deviazione standard della transferrina è pari a 1 mg/ml. Quanti soggetti di riferimento devo includere nel campione affinché l'ampiezza dell'intervallo di confidenza (al 95%) non sia maggiore di 0.4 mg/ml?

$$n = \left(z_{\alpha/2}\sigma/\Delta\right)^2 = \left(1.96 \cdot 1/0.2\right)^2 \approx 96 \approx 100$$

Esercizio 5

Il valore del Flusso di Picco Espiratorio (PEFR) di un gruppo di ragazze di 11 anni ha una distribuzione approssimativamente gaussiana di media 300 l/ml e deviazione standard 20 l/ml.

1) Qual'è la percentuale di ragazze con PEFR tra 260 e 340 l/ml?

2) È vero che il 5% delle ragazze ha PEFR inferiore a 260 l/ml?

3) È vero che circa il 50% delle ragazze ha PEFR che supera i 300 l/ml?

Risposte

z_1 = (260-300)/20 = -2

z_2 = (340-300)/20 = 2

P(z>2) = 0.02275 P(z<-2) = 0.02275

P=1-2*0.02275 = 0.9545 ≈95%

Esercizio 6

Una compagnia assicurativa è convinta che le persone siano divise tra predisposte a contrarre una certa patologia e non predisposte.

Le loro statistiche mostrano che una persona predisposta contrarrà la patologia nel corso di un anno con probabilità 0.4, mentre per una persona non predisposta tale probabilità scende a 0.2.

Assumendo che il 30% della popolazione sia predisposta a contrarre la patologia, quale è la probabilità:

a) che un nuovo assicurato contragga la patologia durante l'anno di validità della polizza?

b) che un nuovo assicurato sia predisposto se durante l'anno di validità della polizza contrae la patologia?

Risposte

Siano P l'evento "l'assicurato è predisposto" e M l'evento "l'assicurato contrae la malattia".

Dunque: *P(P) = 0.3 , P(M | P) = 0.4 , P(M | P) = 0.2*

e le probabilità richieste sono:

a) per il teorema della probabilità totali:

$$P(M) = P(M \cap P) + P(M \cap \overline{P}) =$$
$$= P(M \mid P)P(P) + P(M \mid \overline{P})P(\overline{P}) =$$
$$= 0.4 * 0.3 + 0.2 * 0.7 = 0.12 + 0.14 = 0.26$$

b) per la legge di Bayes:

$$P(P \mid M) = P(P \cap M)/P(M) =$$
$$= P(M \mid P)P(P)/P(M) =$$
$$= 0.4 \cdot 0.3/0.26 = 0.4615$$

Esercizio 7

I valori medi di emoglobina in un campione di 20 maschi e in un campione di 20 femmine sono risultati rispettivamente pari a 16 g/100ml e 14 g/100ml. Se si assume che la distribuzione dei valori ematici di emoglobina sia gaussiana con deviazione standard pari a 1 g/100ml nell'uno e nell'altro sesso, posso affermare che per quanto riguarda la media

a) l'IC, al 95%, ha un'ampiezza maggiore per le femmine

b) l'IC, al 95%, ha un'ampiezza minore per le femmine

c) gli IC, al 95%, per i due gruppi hanno lo stesso limite superiore e lo stesso limite inferiore

d) nelle femmine, l'IC al 90%, ha un'ampiezza maggiore dell'IC al 95%

e) gli IC al 95% per i due gruppi hanno la stessa ampiezza

Risposte

$$\Delta = z_{\alpha/2}\sigma \Big/ \sqrt{n}$$

$$IC_M = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma \Big/ \sqrt{n} = 16 \pm 1.96 \cdot 1 \Big/ \sqrt{20} \rightarrow [15.56 - 16.44]$$

$$IC_F = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma \Big/ \sqrt{n} = 14 \pm 1.96 \cdot 1 \Big/ \sqrt{20} \rightarrow [13.56 - 14.44]$$

$$IC_F = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma \Big/ \sqrt{n} = 14 \pm 1.64 \cdot 1 \Big/ \sqrt{20} \rightarrow [13.63 - 14.37]$$

Esercizio 8

Nei maschi, la distribuzione dell'uricemia e asimmetrica positiva con media 5.6 mg/100ml e deviazione standard 1 mg/100 ml. La forma della distribuzione delle medie di campioni di numerosità n pari a 625 è:

a) approssimativamente gaussiana con media 5.6 mg/100 ml e deviazione standard 1/25 mg/100ml

b) approssimativamente gaussiana con media 5.6 mg/100 ml e deviazione standard 1/625 mg/100ml

c) approssimativamente gaussiana con media 5.6 mg/100 ml e deviazione standard 1 mg/100ml

d) come la distribuzione dell'uricemia con media 5.6 mg/100 ml e deviazione standard 1 mg/100ml

e) come la distribuzione dell'uricemia con media 5.6 mg/100 ml e deviazione standard 1/25 mg/100ml

Esercizio 9

La tavola di contingenza considera la presenza (M+) o l'assenza (M-) di una certa malattia in maschi (M) e femmine (F). Gli eventi femmina (F) e presenza di malattia (M+) sono indipendenti?

	M+	**M-**	**Totale**
M	56	123	179
F	114	87	201
Totale	170	210	380

Soluzione

Se gli eventi femmina (F) e presenza di malattia (M+) fossero indipendenti, $P(F \cap M+) = P(F)*P(M+)$

$P(F \cap M+)=56/380=0.1474$

$P(F)=201/380=0.5289$

$P(M+)=170/380=0.4474$

$P(F)*P(M+)=0.5289*0.4474=0.2366$

$P(F \cap M+) \neq P(F)*P(M+)$ non sono eventi indipendenti

Esercizio 10

Vengono effettuate 20 misurazioni della concentrazione di un certo enzima nel sangue di diversi individui e si osservano una media campionaria = 1.23, la deviazione standard è nota e pari a $\sigma = 0.4$.

1. Supponendo che i valori di questa concentrazione seguano una distribuzione normale, qual è un intervallo di fiducia al livello 95% per la media della concentrazione?

2. Come sarebbe cambiato l'IC se fossero stati campionati 100 individui?

Risposte

$$IC = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma \big/ \sqrt{n} = 1.23 \pm 1.96 \cdot 0.4 \big/ \sqrt{20} \rightarrow [1.05 - 1.41]$$

$$IC = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma \big/ \sqrt{n} = 1.23 \pm 1.96 \cdot 0.4 \big/ \sqrt{100} \rightarrow [1.15 - 1.31]$$

Esercizio 11

L'incidenza alla nascita della sindrome genetica X è dell' 0.12% per età della madre inferiore ai 30 anni e del 0.28% per età superiore a 30 anni. La signora Y ha 10 figli di cui 3 avuti prima dei 30 anni e 7 dopo i 30 anni. Qual'è la probabilità che nessuno sia affetto da sindrome X ?

Risposta:

P(nessun figlio con sindrome di down)=$P(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{10})$=

Gli eventi sono tutti indipendenti, per cui

$= P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot \dots \cdot P(S_{10}) = (1-0.0012)^3 \cdot (1-0.0028)^7 = 0.9771$

Esercizio 12

Un individuo che prende le dovute precauzioni si ammala della malattia A con probabilità del 5%, se non le prende ha il 25% di probabilità di ammalarsi. Di un gruppo di 15 persone 10 hanno preso le precauzioni. Andrea, uno dei 15 del gruppo, non si ammala. Qual'è la probabilità che non abbia preso precauzioni?

Risposta:

A = si ammala NA = non si ammala

P = prende precauzioni NP = non prende precauzioni

P(A|P)=0.05 P(A|NP)=0.25 P(P)=10/15 P(NP)=5/15

$$P(NP \mid NA) = \frac{P(NP \cap NA)}{P(NA)} = \frac{P(NA \mid NP)\cdot P(NP)}{P(NA \cap NP) + P(NA \cap P)} =$$

$$= \frac{P(NA \mid NP)\cdot P(NP)}{P(NA \mid NP)\cdot P(NP) + P(NA \mid P)\cdot P(P)} = \frac{(1-0.25)\cdot 5/15}{(1-0.25)\cdot 5/15 + (1-0.05)\cdot 10/15} =$$

$$= \frac{0.75/3}{0.75/3 + 0.95\cdot 2/3} = \frac{0.75}{0.75+1.9} = \frac{0.75}{2.65} = 0.28$$

Esercizio 13

L'altezza di 450 studenti immatricolati all'Università di Roma Tre nel 1998 è risultata in media di 170 cm., con una ds di 7.5 cm. Nell'ipotesi che la statura si distribuisca come una Normale, quale è il numero di studenti con altezza:

a) maggiore di 180 cm.;

b) minore o uguale a 160 cm.;

c) tra 162.5 e 172.5.

Risposta:

a) $P(X > 180) = P\left(Z > \frac{180-170}{7.5}\right) = P(Z > 1.33) = 0.092$

$n = 0.092 \cdot 450 \cong 41$

b) $P(X \le 160) = P\left(Z \le \frac{160-170}{7.5}\right) = P(Z \le -1.33) = 0.092$

$n = 0.092 \cdot 450 \cong 41$

c) $P(162.5 < X < 172.5) = P\left(\frac{162.5-170}{7.5} < Z < \frac{172.5-170}{7.5}\right) =$

$= P(-1 < Z < 0.33) = 1 - P(Z < -1) - P(Z > 0.33) =$

$= 1 - 0.15866 - 0.37070 = 0.47064 \quad n = 0.47064 \cdot 450 \cong 212$

Esercizio 14

Uno studente universitario ha programmato di sostenere nella sessione estiva gli esami X e Y. Sia A l'evento "supera l'esame X" e sia E l'evento "supera l'esame Y", con P(A)=0.7, P(E)=0.5, P(A∩E)=0.4. Calcolare la probabilità che non superi nessuno dei due esami.

Risposta:

$P(\bar{A} \cap \bar{E}) = 1 - P(A \cup E) = 1 - P(A) - P(E) + P(A \cap E) =$

$= 1 - 0.7 - 0.5 + 0.4 = 0.2$

Esercizio 15

In una popolazione la probabilità che un soggetto scelto a caso sia stato esposto ad un allergene ed abbia avuto una reazione all'allergene è 0.60. La probabilità che un soggetto esposto all'allergene abbia avuto una reazione allergica è 0.8. Se un soggetto è scelto a caso da questa popolazione, qual è la probabilità che sia stato esposto all'allergene?

P(E ∩R)=0.6

P(R|E)=0.8

P(E)=?

P(R|E)=P(E ∩R)/P(E)

P(E)=P(E ∩R)/P(R|E)=0.6/0.8=0.75