Esercitazione

Test statistici

Esercizio 1

Una certa pianta viene coltivata con un nuovo antiparassitario, e si vuole vedere se tale novità introduce un aumento nella quantità di frutti prodotti. Le coltivazioni precedenti avevano manifestato una media di 50 frutti per albero, con una deviazione standard pari a 10, mentre la media di un campione di 500 alberi coltivati con il nuovo prodotto è 51.07 frutti con uguale deviazione standard.

Verificare l'efficacia del nuovo prodotto, assumendo α=0.05 e α =0.01

Soluzione

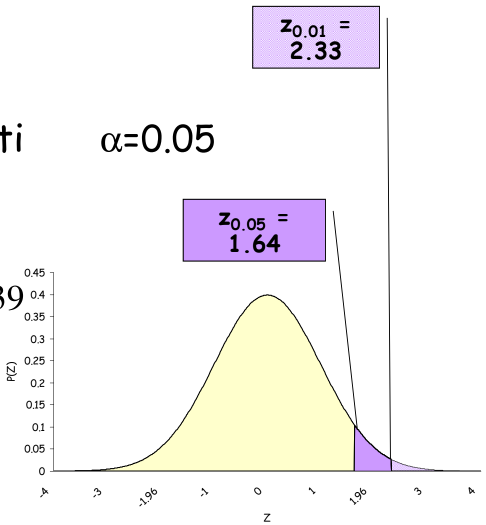
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 50 \\ H_1 : \mu > 50 \end{cases}$$

n=500 $\bar{x} = 51.07$ frutti α=0.05

$$z = \frac{51.07 - 50}{10/\sqrt{500}} = \frac{1.07}{0.447} = 2.39$$

$z_{oss} > z_{\alpha} \Rightarrow$ rifiuto H_0

In entrambi i casi



Esercizio 2

Per studiare come una piccola lesione in una particolare struttura del cervello del ratto può influire sull'esecuzione di un compito di discriminazione visiva, vengono formati due gruppi di ratti: uno contenente ratti con lesione, l'altro contenente ratti senza lesioni.

Ciascun ratto deve risolvere una serie di prove; di seguito vengono riportati il numero di tentativi impiegati da ciascun ratto nei due gruppi, prima di superare le prove:

Senza lesioni	10	8	16	14	16	9	16				
Con lesioni	14	12	15	15	10	11	24	10	22	13	12

Verificare l'ipotesi che la lesione abbia un effetto negativo sulla discriminazione visiva, ipotizzando dapprima un errore massimo accettabile α = 0.05, quindi α = 0.01.

Soluzione (1)

- La prima cosa da fare è calcolare le stime della media e della varianza campionarie

$$\bar{x}_{SL} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_{SLi}}{7} = \frac{89}{7} = 12.71 \quad \bar{x}_L = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_{Li}}{11} = \frac{158}{11} = 14.36$$

$$s_{SL}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_{SLi}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{7} x_{SLi}\right)^2}{7}}{7-1} = \frac{1209 - \frac{7921}{7}}{6} = 12.90$$

$$s_L^2 = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_{Li}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{11} x_{Li}\right)^2}{11}}{11-1} = \frac{2484 - \frac{24964}{11}}{10} = 21.45$$

Soluzione (2)

- Definiamo il sistema d'ipotesi

$$\begin{cases} H_0 : \mu_L = \mu_{SL} \\ H_1 : \mu_L > \mu_{SL} \end{cases}$$

- Calcoliamo la varianza pouled e la statistica test

$$s_p^2 = \frac{(n_L - 1)\cdot s_L^2 + (n_{SL} - 1)\cdot s_{SL}^2}{n_L + n_{SL} - 2} = \frac{10 \cdot 21.45 + 6 \cdot 12.90}{11 + 7 - 2} = 18.25$$

$$\Rightarrow s_p = \sqrt{18.24} = 4.27$$

$$t = \frac{\bar{x}_L - \bar{x}_{SL}}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_L} + \frac{1}{n_{SL}}}} = \frac{14.36 - 12.71}{4.27\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{7}}} = \frac{1.65}{2.07} = 0.80$$

- Con a=0.05 la soglia della regione di rifiuto è 1.746, mentre con a=0.01 la soglia è 2.583 pertanto posso concludere che in entrambi i casi le lesioni non hanno effetto negativo sulla discriminazione visiva

Esercizio 3

Connor et al. hanno indagato sulle differenze per sesso dell'aggressione reattiva e proattiva in un campione di 323 bambini e adolescenti (68 femmine e 255 maschi). Nel campione 31 femmine e 53 maschi hanno riferito un abuso sessuale. Vogliamo costruire un intervallo di confidenza al 99% per la differenza fra le proporzioni degli abusi sessuali nelle due popolazioni campionate.

Soluzioni

Le proporzioni campionarie per femmine e maschi sono:

p_f=31/68=0.4559 e p_m=53/255=0.2078

La differenza fra le proporzioni campionarie è:

$p_f - p_m$=0.2481

L'errore standard è: $s_{f-m} = \sqrt{\frac{0.4559 \cdot 0.5441}{68} + \frac{0.2078 \cdot 0.7922}{255}} = 0.0655$

$z_{\alpha/2}$=2.58 da cui L'intervallo di confidenza sarà:

0.2481±2.58*0.0655 $IC_{99\%}$=[0.0791, 0.4171]

Abbiamo un grado di fiducia che, per le popolazioni campionate, la proporzione di abusi sessuali fra le ragazze sia maggiore della proporzione fra i ragazzi di una quantità compresa fra l'8% e il 42%.

L'intervallo non contiene lo zero, dunque la proporzione nelle due popolazioni è diversa con confidenza del 99%

Esercizio 4

In una popolazione sana di riferimento, il livello medio serico di protrombina è 20.0 mg/100 ml e la deviazione standard vale 4 mg/100 ml.

Un campione di 40 pazienti affetti da carenza di vitamina K ha un livello medio campionario di protrombina di 18.5 mg/100 ml.

Da questi dati è possibile dedurre che il valore atteso di protrombina nei pazienti con carenza di vitamina K è lo stesso che nella popolazione sana (α = 0.05)?

Calcolare il p-value

Soluzione

- Definiamo il sistema d'ipotesi

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu \neq 20 \end{cases}$$

- Calcoliamo la statistica test

$$z = \frac{18.5 - 20}{4/\sqrt{40}} = \frac{-1.5}{0.632} = -2.37$$

- Z < della soglia della zona di rifiuto di sx, pertanto posso concludere che il valore atteso di protrombina nei pazienti con carenza di vitamina K è diverso da quello che si osserva nella popolazione sana
- P-value=2*Pr(Z<-2.37)=2*0.00889=0.01778

Esercizio 5

E' vero che alla sera siamo più piccoli che al mattino?

Per verificare questa affermazione, è stato selezionato un campione casuale di 12 soggetti, ciascuno dei quali è stato misurato prima al mattino appena sveglio, poi alla sera prima di coricarsi. La seguente tabella riporta i valori rilevati.

Verificare con appropriati metodi, se la differenza evidenziabile dai dati, può essere considerata significativa (α=0.05), indicando il corrispondente livello di significatività

Sogg.	Mattino	Sera
1	167,3	167,2
2	168,9	168,4
3	184,2	183,7
4	182,6	182,2
5	178,3	178,2
6	173,2	172,8
7	170,5	170,4
8	168,6	168,1
9	164,8	164,2
10	163,5	163,1
11	166,2	165,9
12	169,4	169,2

Soluzione (1)

- Calcoliamo la variabile differenza ($d=h_m-h_s$)
- Definiamo il sistema d'ipotesi:
- Dato che si vuole verificare se al mattino si è più alti rispetto alla sera, confronteremo la differenza di altezza media con il parametro 0

$$\begin{cases} H_0 : \delta = 0 \\ H_1 : \delta > 0 \end{cases}$$

- La soglia della zona di rifiuto sarà 1.796

Sogg.	Mattino	Sera	d
1	167,3	167,2	0.1
2	168,9	168,4	0.5
3	184,2	183,7	0.5
4	182,6	182,2	0.4
5	178,3	178,2	0.1
6	173,2	172,8	0.4
7	170,5	170,4	0.1
8	168,6	168,1	0.5
9	164,8	164,2	0.6
10	163,5	163,1	0.4
11	166,2	165,9	0.3
12	169,4	169,2	0.2

Soluzione (2)

- Calcoliamo le stime della media e della deviazione standard

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x}{12} = \frac{4.1}{12} = 0.34$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12} x^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{12} x\right)^2}{12}}{12-1}} = \sqrt{\frac{1.75 - \frac{16.81}{12}}{11}} = \sqrt{0.0317} = 0.178$$

- la statistica test

$$t = \frac{0.34 - 0}{0.178/\sqrt{12}} = \frac{0.34}{0.051} = 6.61$$

Osservando i valori di probabilità relativi ad un t-student con 11 GdL possiamo affermare che la statistica test fornisce un valore di p-value inferiore a 0.0005, pertanto possiamo dire che la differenza tra l'altezza al mattina e alla sera è statisticamente significativa

Esercizio 6

Lavorare in una città diversa da quella in cui si vive, richiede diverse ore di viaggio al mese con inevitabili disagi; può tutto questo influire sui cicli mestruali delle donne?

Per analizzare più a fondo questo problema, sono stati selezionati 2 campioni di 28 donne ciascuno, che svolgevano attività lavorative diverse:

Lavoratrici non pendolari
Lavoratrici pendolari

Su ciascuna delle donne dei 2 gruppi è stato rilevato il numero medio di mestruazioni all'anno, con i seguenti risultati:

Lavoratrici non pendolari (Media=10.1, Std=2.1)
Lavoratrici pendolari (Media=9.1, Std=2.4)

Verificare se esiste realmente una differenza significativa tra le 2 tipologie di donne (α=0.05)

Calcolare l'intervallo di confidenza della differenza tra medie.

Soluzione (1)

- Nel definire il sistema d'ipotesi non si fa alcuna ipotesi sul fatto che lo stress aumenti o riduca il n° di cicli mestruali, pertanto scegliamo di eseguire un test bilaterale

$$\begin{cases} H_0 : \mu_{NP} = \mu_P \\ H_1 : \mu_{NP} \neq \mu_P \end{cases}$$

- Media e varianza sono campionarie, pertanto devo applicare un test t-student
- Calcolo la varianza pouled

$$s_p^2 = \frac{(n_{NP}-1)\cdot s_{NP}^2 + (n_P - 1)\cdot s_P^2}{n_{NP} + n_P - 2} = \frac{27\cdot 2.1^2 + 27 \cdot 2.4^2}{28+28-2} = 5.085$$

$$\Rightarrow s_p = \sqrt{5.085} = 2.25$$

Soluzione (2)

$$t = \frac{\bar{x}_{NP} - \bar{x}_P}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_{NP}} + \frac{1}{n_P}}} = \frac{10.1 - 9.1}{2.25\sqrt{\frac{1}{28} + \frac{1}{28}}} = \frac{1}{0.60} = 1.66$$

- Dato che ho 54 gradi di libertà posso confrontare il valore della statistica test con la distribuzione N(0,1) e quindi le soglie della regione di rifiuto sono [-1.96; 1.96]. Posso, quindi, rifiutare H_0 e dire che il pendolarismo non influenza in modo significativo il ciclo mestruale
- Per calcolare l'IC ho bisogno di conoscere il valore della t-student con 54 GdL, ma non è tabulata sulla tavola per cui utilizzo il valore della N(0,1) e quindi z=1.96

$$IC : (\bar{x}_{NP} - \bar{x}_P) \pm 1.96 \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n_{NP}} + \frac{1}{n_P}} = 1 \pm 1.18 \Rightarrow [-0.18; 2.18]$$

- L'intervallo di confidenza comprende lo 0 quindi concorda con l'esito del test e propende per il non rifiuto di H_0

Esercizio 7

Un articolo pubblicato su Kidney International di Avram et al. si è interessata a 529 pazienti in emodialisi e a 326 pazienti in dialisi peritoneale. I ricercatori hanno visto che 249 erano i pazienti diabeti in emodialisi e 134 quelli diabetici in dialisi peritoneale. Questi dati forniscono degli elementi sufficienti per concludere che c'è una differente proporzione di diabete nei due gruppi di studio? Sia α=0.05.

Soluzione

p_e=249/529=0.471

p_p=134/326=0.411

p=(249+134)/(529+326)=383/855=0.448

$$s_p = \sqrt{0.448 \cdot 0.552\left(\frac{1}{529}+\frac{1}{326}\right)} = 0.035$$

$$z = \frac{0.471-0.411}{0.035} = \frac{0.06}{0.035} = 1.714$$

Non rifiuto H0

P-value = 2*0.0436 = 0.0872

Esercizio 8

- Due gruppi di pazienti affetti da epatite virale sono stati trattati il primo (A) con terapia vitaminica e il secondo (B) con terapia prednisonica. Dopo due settimane di cura sono state rilevate le transaminasi. I valori sono riportati in tabella.

A	32	40	50	73	90	100	89
B	45	59	60	36	42	34	

- Dimostrare, stimando l'intervallo di confidenza al 95% per la differenza, se vi è differenza tra i due trattamenti

Soluzione (1)

$$\bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_{Ai}}{7} = \frac{474}{7} = 67.7 \qquad \bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_{Bi}}{6} = \frac{276}{6} = 46$$

$$s_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_{Ai}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{7} x_{Ai}\right)^2}{7}}{7-1} = \frac{36474 - \frac{224676}{7}}{6} = 729.57$$

$$s_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_{Bi}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{6} x_{Bi}\right)^2}{6}}{6-1} = \frac{13322 - \frac{76176}{6}}{5} = 125.2$$

$$s_p^2 = \frac{6 \cdot 729.57 + 5 \cdot 125.2}{7+6-2} = 454.86 \quad \Rightarrow s_p = \sqrt{454.86} = 21.33$$

Soluzione (2)

$$IC:(\bar{x}_A-\bar{x}_B)\pm t_{11,0.05}\cdot s_p\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}=$$
$$=(67.7-46)\pm 2.201\cdot 21.3\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{6}}=$$
$$=21.7\pm 2.201\cdot 11.85\Rightarrow[-0.44;\,47.78]$$

Esercizio 9

Sono stati prelevati campioni di sangue da 8 pazienti e in ciascun campione è stato misurato il contenuto di albumina utilizzando due metodi (A e B).

I valori delle differenze osservate negli 8 pazienti sono: 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.3, 0.5, -0.5, 1.3 gm/100ml. Valutare con l'opportuno test statistico se esiste una differenza significativa tra i due metodi e riportare il relativo p-value.

Soluzione

$$\begin{cases} H_0:\delta=0 \\ H_1:\delta\neq 0 \end{cases}\qquad \bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_i}{8}=\frac{4.6}{8}=0.575$$

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}x^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{8}x\right)^2}{8}}{8-1}}=\sqrt{\frac{4.58-\frac{21.16}{8}}{7}}=\sqrt{0.276}=0.526$$

$$t=\frac{0.575-0}{0.526/\sqrt{8}}=\frac{0.575}{0.186}=3.09$$

Devo confrontare la statistica test ottenuta con un t con 7 GdL e α=0.05 che ha valore pari a 2.365 pertanto posso rifiutare H_0 e dire che i valori misurati dai due metodi sono statisticamente differenti

Esercizio 10

- Si vuole comparare l'effetto di due antibiotici A e B nel trattamento di pazienti con polmonite lobare.
- A 59 pazienti è stato somministrato il farmaco A, mentre a 43 il farmaco B.
- È stato rilevato, per ogni paziente, il numero di giorni per abbassare la temperatura a livello normale.
- Cosa si può concludere sull'efficacia dei due farmaci nell'abbassare la temperatura?

	Day	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Tot.
N.	A	17	8	5	9	7	1	2	1	2	7	59
Pts	B	15	8	8	5	3	1	0	0	0	3	43

Soluzione (1)

- Devo in primo luogo stimare la media e la deviazione standard

$$\bar{x}_A = \frac{\sum_{k=1}^{10} x_{Ai} \cdot f_{Ai}}{n_A} = \frac{235}{59} = 3.98 \qquad \bar{x}_B = \frac{\sum_{k=1}^{10} x_{Bi} \cdot f_{Bi}}{n_B} = \frac{126}{43} = 2.93$$

$$s_A = \frac{\sum_{k=1}^{10} \left(x_{Ai} - \bar{x}_A\right)^2 \cdot f_{Ai}}{n_A - 1} = \frac{536.98}{58} = 9.26$$

$$s_B = \frac{\sum_{k=1}^{10} \left(x_{Bi} - \bar{x}_B\right)^2 \cdot f_{Bi}}{n_B - 1} = \frac{240.79}{43} = 5.73$$

Soluzione (2)

- Ora dobbiamo stimare la varianza pouled

$$s_p^2 = \frac{58 \cdot 9.26 + 42 \cdot 5.73}{59 + 43 - 2} = \frac{777.74}{100} = 7.78 \quad \Rightarrow s_p = \sqrt{7.78} = 2.79$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} = \frac{3.98 - 2.93}{2.79\sqrt{\frac{1}{59} + \frac{1}{43}}} = \frac{1.05}{0.56} = 1.875$$

Esercizio 11

Un'importante reazione avversa della radioterapia (RT) per tumori testa-collo è la xerostomia (secchezza delle fauci). Warde et al. (Int J Radiation Oncology Biol.Phys 2002) hanno pianificato uno studio randomizzato per valutare l'efficacia della pilocarpina nel ridurre i sintomi della xerostomia post RT. Sono stati reclutati 130 pazienti sottoposti a RT: 65 sono stati assegnati ad assumere Pilocarpina (T) e 65 Placebo (P). La xerostomia è stata valutata su una scala lineare analogica (LASA), che valuta la percezione di secchezza su una scala continua da 0 (massima secchezza) a 100. Dopo un mese la percezione di secchezza è risultata: 40.2 (d.s. 27.7) nel gruppo T e 36.6 (d.s. 25.9) nel gruppo P. Assumendo che la percezione di secchezza di distribuisca normalmente, verificare se la pilocarpina modifica i sintomi di xerostomia con un livello di confidenza del 5%.

Soluzione

$$\begin{cases} H_0 : \mu_T = \mu_P \\ H_1 : \mu_T \neq \mu_P \end{cases}$$

$$s_p^2 = \frac{(65-1) \cdot 27.7^2 + (65-1) \cdot 25.9^2}{65 + 65 - 2} = 719.05 \quad \Rightarrow s_p = \sqrt{719.05} = 26.82$$

$$t = \frac{\bar{x}_T - \bar{x}_P}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_T} + \frac{1}{n_P}}} = \frac{40.2 - 36.6}{26.82\sqrt{\frac{1}{65} + \frac{1}{65}}} = \frac{3.6}{4.704} = 0.765$$

n>30, allora posso utilizzare le tavole della Normale (0,1). La soglia della regione di accettazione sono -/+1.96, per cui non c'è evidenza che la pilocarpina modifichi la sensazione di secchezza

Esercizio 12

Per valutare l'effetto di un colluttorio a base di fluoro per ridurre l'ipersensibilità dentale Yates et al (2004) hanno misurato il grado di dolore in risposta ad uno stimolo con acqua fredda tramite una scala VAS (scala visiva analogica) su 45 soggetti. La misurazione è stata fatta al reclutamento e dopo 1 mese di assunzione del colluttorio (2v/die). La media della differenza (post-pre) di punteggio VAS tra le due misurazioni è risultata -5.84 con una deviazione standard di 18.2.

a) Verificare se il colluttorio ha ridotto la sensibilità dentale con un opportuno test (α=0.05).
b) Successivamente, hanno effettuato lo stesso esperimento su altri 45 soggetti a cui hanno dato un colluttorio di aspetto e colore identico al precedente ma senza fluoro (placebo), trovando una differenza media di -5.58 con una deviazione standard di 20.1.

Verificare con un opportuno test se i due colluttori hanno un diverso effetto sulla sensibilità dentale. Commentare

Soluzione

$$\begin{cases} H_0 : \delta_F = 0 \\ H_1 : \delta_F < 0 \end{cases} \qquad t = \frac{-5.84}{18.2/\sqrt{45}} = -2.15$$

Poiché il -2.15<-1.64, c'è evidenza che il colluttorio al fluoro riduca l'ipersensibilità dentale.

$$\begin{cases} H_0 : \delta_F = \delta_P \\ H_1 : \delta_F \neq \delta_P \end{cases} \qquad s_p^2 = \frac{(45-1)\cdot 18.2^2 + (45-1)\cdot 20.1^2}{45+45-2} = 367.63$$

$$\Rightarrow s_p = \sqrt{367.63} = 19.2$$

$$t = \frac{-5.84-(-5.58)}{19.2 * \sqrt{\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{45}\right)}} = \frac{0.26}{3.36} = -0.077$$

Poiché il -0.077 cade nella zona di accettazione di H0 (-1.96;+1.96) non c'è evidenza di differenza tra l'effetto del colluttorio con il fluoro e senza nel ridurre l'ipersensibilità dentale

Esercizio 13

Wagenknecht et al. Hanno raccolto i dati di un campione di 301 donne ispaniche che vivono a San Antonio in Texas. Una variabile di interesse è la percentuale di donne con IFG (glicemia scompensata a digiuno). L'IFG è uno stadio intermedio tra la normale omeostasi glucidica e il diabete. Nello studio, 24 donne sono state classificate come IFG. Nel lavoro viene stimato che l'IFG nelle donne ispaniche è del 6.3%. È possibile concludere che nella popolazione di donne ispaniche di San Antonio la proporzione di IFG è più alta del 6.3%

Soluzione

$$\begin{cases} H_0 : \pi = 0.063 \\ H_1 : \pi > 0.063 \end{cases}$$

p=24/301=0.080

$$s_p = \sqrt{0.063 \cdot 0.937 \left(\frac{1}{301}\right)} = 0.014$$

$$z = \frac{0.080 - 0.063}{0.014} = \frac{0.017}{0.014} = 1.21$$

Non si rifiuta H0