La distribuzione t di "Student"

La v.c. X ha distribuzione *t di Student*, con $k > 0$ g.d.l., se la sua densità è la seguente:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}}, \quad x \in R$$

(Disegnare il grafico)

Si può dimostrare che:

$$E(X) = 0 \quad (k > 1); \qquad Var(X) = \frac{k}{k-2} \quad (k > 2)$$

Inoltre μ_r esiste per $r < k$. Ne consegue che la v.c. *t di Student* non ha f.g.m..

Teorema

Sia Z una v.c. distribuita come una normale standardizzata. Sia U una v.c. distribuita come una chi-quadrato con k g.d.l.. Siano Z e U indipendenti in probabilità. Allora la v.c. $X = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}$ si distribuisce secondo una *t di Student* con k g.d.l..

Corollario

Sia $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un campione casuale proveniente dalla v.c. normale di aspettativa μ e varianza σ^2. Allora la v.c. $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2 / n}}$ ha distribuzione *t di Student* con $(n-1)$ g.d.l..

Dimostrazione

Si considerino le variabili casuali $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ e $U = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$. Poiché esse sono indipendenti, si può applicare il teorema precedente, ottenendo la v.c.:

$$T = \frac{\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Big/ (n-1)}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2 / n}},$$

la cui distribuzione è *t di Student* con $(n-1)$ g.d.l..

La distribuzione F di Fisher

La v.c. X ha distribuzione *F di Fisher* con m e n gradi di libertà se ha la seguente funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m-2}{2}} \dfrac{x^{\frac{m-2}{2}}}{\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+n}{2}}} & x > 0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

m rappresenta i gradi di libertà del numeratore; n rappresenta i gradi di libertà del denominatore.

Si può dimostrare che:

- $E(X) = \dfrac{n}{n-2} \quad (n > 2)$
- $Var(X) = \dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad (n > 4)$
- $\mu_r = E(X^r)$ esiste solo per $r < \frac{n}{2}$.

Da quest'ultimo punto segue che la v.c. *F di Fisher* non ha f.g.m..

Teorema

Siano U e V due v.c. chi-quadrato indipendenti con m e n g.d.l. rispettivamente. Allora la v.c.

$$X = \frac{U/m}{V/n}$$

è distribuita come una v.c. F con m e n g.d.l..

Corollario 1

Sia $\left(X_1, X_2, \cdots, X_m\right)$ un campione casuale proveniente dalla v.c. normale di aspettativa μ_X e varianza σ^2. Sia $\left(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\right)$ un campione casuale proveniente dalla v.c. normale di aspettativa μ_Y e varianza σ^2. Siano i due campioni indipendenti, cioè estratti da popolazioni differenti. Allora, la v.c.

$$X = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma^2} \Big/ (m-1)}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{\sigma^2} \Big/ (n-1)} = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

ha distribuzione F con $(m-1)$ e $(n-1)$ g.d.l.

Corollario 2

Se X ha distribuzione F con m e n g.d.l., allora $Y=\dfrac{1}{X}$ ha distribuzione F con n e m g.d.l..

Tale corollario è utile per la consultazione della tavole della distribuzione.

Si supponga di voler determinare il quantile y_α. Esso è definito come $P\{Y \le y_\alpha\}=\alpha$.

Vale la seguente relazione:

$$P\{Y \le y_\alpha\}=P\left\{X=\frac{1}{Y}\ge\frac{1}{y_\alpha}\right\}=\alpha,$$ da cui

$$P\left\{X \le \frac{1}{y_\alpha}\right\}=1-\alpha \;\Rightarrow\; \frac{1}{y_\alpha}=x_{(1-\alpha)} \;\Rightarrow\; y_\alpha=\frac{1}{x_{(1-\alpha)}}.$$

(Seguono esempi).

CAMPIONAMENTO DA POPOLAZIONE NORMALE

Si considererà un campione casuale $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ da una distribuzione normale di aspettativa μ e varianza σ^2. (Ogni v.c. X_i è distribuita come una normale di aspettativa μ e varianza σ^2. Le v.c. $X_i, \quad i = 1, \cdots, n$ sono fra loro indipendenti)

Intervalli di confidenza per μ

- Caso 1 σ^2 nota.

Si è dimostrato che $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ ha distribuzione normale standard.

Si tratta di rintracciare *a* e *b* tali che

$$P\left\{ a \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \le b \right\} = 1 - \alpha$$

(da grafico, per simmetria)

$$P\left\{ -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} =$$

$$= P\left\{- z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} - \mu \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} =$$

$$= P\left\{- \overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} =$$

$$= P\left\{\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq +\overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$$

Pertanto l'intervallo di confidenza per l'aspettativa μ al livello di confidenza $(1-\alpha)$ è dato da:

$$\left\{\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}.$$

• Caso 2 σ^2 non nota.

Si è dimostrato che $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$ ha distribuzione *t* con $(n-1)$ g.d.l..

Si tratta di rintracciare *a* e *b* tali che

$$P\left\{a \leq \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \leq b\right\} = 1-\alpha$$

(da grafico, per simmetria)

$$P\left\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

Pertanto l'intervallo di confidenza per l'aspettativa μ al livello di confidenza $(1-\alpha)$ è dato da:

$$\left\{\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}$$

Intervalli di confidenza per σ^2

• Caso 1 μ nota.

Si è dimostrato che $V = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ ha distribuzione chi-quadrato con *n* g.d.l..

Pertanto vale:

$$P\left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right\} =$$

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} \geq \sigma^2 \geq \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right\} =$$

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right\} = 1-\alpha.$$

Pertanto l'intervallo di confidenza per la varianza σ^2 al livello di confidenza $(1-\alpha)$ è dato da:

$$\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right\}.$$

Si noti che vale:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n} X_i + n\mu^2 .$$

- Caso 2 μ non nota.

Si è dimostrato che $U = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$ ha distribuzione chi-quadrato con $(n-1)$ g.d.l..
Pertanto vale:

$$P\left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} =$$

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \ge \sigma^2 \ge \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right\} =$$

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right\} = 1-\alpha.$$

Pertanto l'intervallo di confidenza per la varianza σ^2 al livello di confidenza $(1-\alpha)$ è dato da:

$$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right\}.$$

Si noti che vale:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2.$$

Esempio

Dalla popolazione degli iscritti alla leva in un certo anno, si è rilevata l'altezza in centimetri di 25 unità statistiche scelte a caso, ottenendo le seguenti sintesi: $\sum_{i=1}^{25} x_i = 4312{,}5$ $\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 744608{,}5$.

a) Si determini l'intervallo di confidenza al 95% per l'altezza media della popolazione
b) Si determini l'intervallo di confidenza al 99% della varianza dell'altezza della popolazione.

Soluzione

a) Si tratta del caso in cui la varianza non è nota.

$$\bar{x} = \frac{1}{25}\sum x_i = \frac{4312{,}5}{25} = 172{,}5$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 744608{,}5 - 25 \cdot (172{,}5)^2 =$$
$$= 702{,}25$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{702{,}25}{24} = 29{,}2604$$

$$S = \sqrt{29{,}2604} = 5{,}4093$$

$$\left\{ \bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \right\}$$

L'intervallo ha per estremi i valori:

$$172{,}5 \pm 2{,}064 \cdot \frac{5{,}4093}{\sqrt{25}} = 172{,}5 \pm 2{,}2330$$

$$[170{,}267 \le \mu \le 174{,}733]$$

b) Si tratta del caso in cui μ non è nota.

$$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right\}$$

$$\left[\frac{702{,}25}{45{,}6} = 15{,}4002 \le \sigma^2 \le \frac{702{,}25}{9{,}89} = 71{,}0061 \right]$$

$$[3{,}9243 \le \sigma \le 8{,}4265].$$

Le verifiche d'ipotesi

Si considerino n variabili casuali $(X_1, \cdots, X_n)$ indipendenti e aventi la medesima funzione di densità $f(x, \vartheta)$ - variabile casuale continua –, oppure la medesima funzione di probabilità $p(x, \vartheta)$ - variabile casuale discreta. Allora, si dirà che $(X_1, \cdots, X_n)$ è un <u>campione casuale</u> proveniente dalla funzione di densità $f(x, \vartheta)$, oppure dalla funzione di probabilità $p(x, \vartheta)$.

Per <u>ipotesi statistica</u> s'intende una congettura sulla forma della distribuzione dalla quale provengono i dati.

Esempio 1

1. l'aspettativa è pari a 3
2. la varianza è maggiore di 5
3. la distribuzione è simmetrica
4. la distribuzione è normale (gamma, Poisson, ecc.)

Nella teoria classica delle verifiche d'ipotesi, all'ipotesi statistica oggetto di verifica, detta <u>ipotesi nulla</u> (H_0), se ne deve affiancare una contraria, scelta del decisore, detta <u>ipotesi alternativa</u> (H_1).

Si dice test statistico una partizione dello spazio dei possibili risultati campionari in due sottoinsiemi disgiunti:

- la regione critica C, ovvero l'insieme dei risultati campionari per cui il test prescrive di rifiutare l'ipotesi nulla
- la regione di accettazione $\overline{C}$, ovvero l'insieme dei risultati campionari per cui il test prescrive di accettare l'ipotesi nulla (l'insieme complementare, o negazione, di C).

Si possono compiere due tipologie d'errore statistico:

- l'errore di prima specie, che consiste nel rifiutare l'ipotesi nulla quando essa è vera
- l'errore di seconda specie, che consiste nell'accettare l'ipotesi nulla quando essa è falsa.

$D \vert V$	H_0	H_1
H_0	-	II specie
H_1	I specie	-

D è l'ipotesi scelta, V è l'ipotesi vera.

Data la natura statistica dell'esperimento, tali errori si possono commettere con una certa probabilità:

- $\alpha \equiv \Pr(errore\ di\ I\ specie)$

- $\beta \equiv \Pr(\textit{errore di II specie})$.

Un test ideale sarebbe quello che renda minimi contemporaneamente le due probabilità d'errore. Sfortunatamente, le due probabilità d'errore hanno andamenti contrapposti, come mostra il seguente

Esempio 2
Si voglia verificare l'ipotesi nulla che una moneta sia regolare, sulla base di $n = 5$ lanci. Pertanto, si ha un campione casuale da una variabile casuale indicatore di parametro *p* (probabilità di ottenere testa).
Sappiamo che la variabile casuale "numero di teste in 5 lanci" *X* ha distribuzione $bin(n = 5, p)$.
Se la moneta è regolare, *p* sarà pari a ½.
Occorre, come si diceva, definire un'ipotesi alternativa, supponiamo, *p* pari a 0,8.
Questo problema di verifica d'ipotesi può formalizzarsi così:

$$\begin{array}{l} H_0 : p = 0{,}5 \\ H_1 : p = 0{,}8 \end{array}.$$

Si consideri il test avente la seguente regione critica:

$$C = \{ X \geq 4 \},$$

in parole, il test prescrive di rifiutare l'ipotesi nulla se su 5 lanci almeno in 4 esce testa.

Per tale test, calcoliamo le probabilità d'errore statistico:

- $\alpha = P\{X \geq 4 | p = 0,5\} = \sum_{x=4}^{5} \binom{5}{x} \cdot 0,5^{x} \cdot 0,5^{5-x} =$

$$= \binom{5}{4} \cdot 0,5^5 + \binom{5}{5} \cdot 0,5^5 = 6 \cdot 0,5^5 = 0,1875$$

- $\beta = P\{X < 4 | p = 0,8\} = 1 - P\{X \geq 4 | p = 0,8\} =$

$$= 1 - \sum_{x=4}^{5} \binom{5}{x} \cdot 0,8^{x} \cdot 0,2^{5-x} = 1 - \binom{5}{4} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^1 - \binom{5}{5} \cdot 0,8^5 =$$

$$= 1 - 0,4096 - 0,32768 = 0,26272$$

Consideriamo ora un secondo test, avente per regione critica:

$C_1 = \{ X \geq 5\},$

e calcoliamone i due tipi di errore:

- $\alpha_1 = P\{X \geq 5 | p = 0,5\} = \binom{5}{5} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^{5-5} = 0,03125$

- $\beta_1 = P\{X < 5 | p = 0,8\} = 1 - P\{X = 5 | p = 0,8\} =$
$$= 1 - \binom{5}{5} \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^{5-5} = 0,67232.$$

Si nota che $\alpha > \alpha_1$ e $\beta < \beta_1$, cioè che al crescere di α, β diminuisce.

Non essendo possibile minimizzare i due tipi d'errore, la teoria classica delle verifiche d'ipotesi, fissa la probabilità dell'errore di prima specie α, e cerca il test che, a parità di α, rende minima la probabilità d'errore di seconda specie β (test più potente).

Un'ipotesi statistica si dice <u>semplice</u>, se specifica completamente la distribuzione da cui provengono i dati. Altrimenti, essa si dice <u>composta</u>.

Le ipotesi dell'*esempio 2* sono entrambe semplici. Nell'*esempio 1*:

- l'ipotesi 1. è semplice se si campiona dalla distribuzione normale con varianza nota, composta se la varianza non è nota
- l'ipotesi 2. è composta.

Il lemma di Neyman-Pearson fornisce la regione critica del test più potente, qualora si considerino due ipotesi semplici. Generalizzando opportunamente la teoria, è possibile ricavare regioni critiche di test che possiedono buone proprietà statistiche.

Per il campionamento da distribuzione normale, ecco le regioni critiche dei test sui parametri, per vari problemi di verifica d'ipotesi:

Verifiche d'ipotesi su μ

• Caso 1 σ^2 nota.

$H_0 : \mu \le \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

Si rifiuta H_0 se $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$, o, equivalentemente, se $\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$H_0 : \mu \ge \mu_0$

$H_1 : \mu < \mu_0$

Si rifiuta H_0 se $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_{1-\alpha}$, o, equivalentemente, se $\bar{X} < \mu_0 - z_{1-\alpha} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

Si rifiuta H_0 se $\dfrac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, o, equivalentemente, se $\overline{X} \notin \left[\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

- Caso 2 σ^2 non nota.

$H_0 : \mu \leq \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

Si rifiuta H_0 se

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha}(n-1),$$

o, equivalentemente, se

$$\overline{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

$t_{1-\alpha}(n-1)$ indica il quantile di ordine $(1-\alpha)$ della distribuzione t con $(n-1)$ g.d.l..

$H_0 : \mu \geq \mu_0$

$H_1 : \mu < \mu_0$

Si rifiuta H_0 se $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{t/\sqrt{n}} < -t_{1-\alpha}(n-1)$, o, equivalentemente, se $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$.

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

Si rifiuta H_0 se

$$\frac{\left|\bar{X}-\mu_0\right|}{S/\sqrt{n}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),$$

o, equivalentemente, se

$$\bar{X} \notin \left[\mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} ; \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

Verifiche d'ipotesi su σ^2.

- Caso 1 μ nota

$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$

$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

Si rifiuta H_0 se vale

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n),$$

dove $\chi^2_{1-\alpha}(n)$ indica il quantile di ordine $(1-\alpha)$ della distribuzione chi-quadrato con n g.d.l..

$$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

Si rifiuta H_0 se vale

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha}(n).$$

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Si rifiuta H_0 se vale

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \notin \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n);\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right].$$

- Caso 2 μ non nota

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Si rifiuta H_0 se vale

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1),$$

dove $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ indica il quantile di ordine $(1-\alpha)$ della distribuzione chi-quadrato con $(n-1)$ g.d.l..

$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$

$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

Si rifiuta H_0 se vale

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha}(n-1).$$

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Si rifiuta H_0 se vale

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} \notin \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1); \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right].$$

Definizione

Dicesi *p-value* il valore minimo (massimo) della probabilità dell'errore di prima specie per il quale si rifiuta (si accetta) l'ipotesi nulla H_0.

Esempio

La casa costruttrice di una macchina che produce sigarette garantisce che l0 scarto quadratico medio (s.q.m.) del loro peso è pari a 0,05 gr.. Di un campione casuale di 28 sigarette prodotte dalla macchina è stato rilevato il peso, ottenendo le seguenti sintesi: $\sum x_i = 27{,}72 \qquad \sum x_i^2 = 27{,}5245$. Assumendo che la distribuzione del peso possa ritenersi normale:

a) Si determini l'intervallo di confidenza al 95% per il peso medio delle sigarette prodotte dalla macchina, sia tenendo conto della dichiarazione delle casa produttrice, sia non tenendone conto
b) Si verifichi l'ipotesi che il peso medio delle sigarette prodotte dalla macchina

non ecceda 0,978 gr., dando fede all’informazione della casa costruttrice.

c) Si verifichi l’ipotesi che il peso medio delle sigarette prodotte dalla macchina sia pari ad un grammo con alternativa bilaterale

d) Si verifichi l’ipotesi che la casa costruttrice dichiari il vero, volendo commettere l’errore di prima specie con probabilità del 5%.

Soluzione

a) Tenendo conto dell’informazione.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{27,72}{28} = 0,99$$

$$\left\{ \bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

$$0,99 \pm 1,96 \frac{0,05}{\sqrt{28}} = 0,99 \pm 0,0185$$

$$[0,9715; 1,0085]$$

Non tenendo conto dell’informazione della casa costruttrice,

$$\left\{ \overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \right\}$$

$$\sum (x_i - \overline{x})^2 = 27{,}5245 - 28 \cdot 0{,}99^2 = 0{,}0817$$

$$s^2 = \frac{0{,}0817}{28-1} = 0{,}00302592$$

$$s = \sqrt{s^2} = 0{,}0550$$

$$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow t_{0{,}975}(27) = 2{,}052$$

$$0{,}99 \pm 2{,}052 \frac{0{,}0550}{\sqrt{28}} = 0{,}99 \pm 0{,}0213$$

$[0{,}9687; 1{,}0113]$.

b) $\begin{array}{l} H_0 : \mu \le 0{,}978 \\ H_1 : \mu > 0{,}978 \end{array}$

Si rifiuta H_0 se

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{0{,}99 - 0{,}978}{0{,}05 / \sqrt{28}} = 1{,}27 > z_{1-\alpha}$$

$1{,}27 = z_{0{,}8980} \Rightarrow$ *p-value*=0,102.

Accetto l'ipotesi nulla per $\alpha \le 0{,}102$. Rifiuto l'ipotesi nulla per $\alpha > 0{,}102$.

Non dando fede alla dichiarazione della casa costruttrice, si rifiuta H_0 se

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{0,99-0,978}{0,055/\sqrt{28}}=1,1545>t_{1-\alpha}(27)$$

Poiché $t_{0,90}(27)=1,314$, si può dire che si accetta l'ipotesi nulla per $\alpha \le 0,1$.

c) $\begin{array}{l} H_0 : \mu \le 1 \\ H_1 : \mu \ne 1 \end{array}$

Si rifiuta H_0 se

$$\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{|0,99-1|}{0,05/\sqrt{28}}=1,0583>z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$1,06=z_{0,8554} \Rightarrow$ *p-value*$=2\cdot 0,1446=0,2892$.

Accetto l'ipotesi nulla per $\alpha \le 0,2892$.

Non tenendo conto dell'informazione della casa costruttrice, si rifiuta H_0 se

$$\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}}=\frac{|0,99-1|}{0,055/\sqrt{28}}=0,9621>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(27)$$

Poiché $t_{0,90}(27)=1,314$, si può dire che si accetta l'ipotesi nulla per $\frac{\alpha}{2}\le 0,1 \Rightarrow \alpha \le 0,2$.

d) $\begin{array}{l} H_0 : \sigma = 0,05 \\ H_0 : \sigma \ne 0,05 \end{array}$

$\alpha = 0{,}05.$

Si rifiuta H_0 se vale

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma_0^2} \notin \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1);\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right].$$

Poichè

$$\frac{0{,}0817}{0{,}05^2} = 32{,}68 \in \left[\chi^2_{0{,}025}(27);\chi^2_{0{,}975}(27)\right] = [14{,}6;43{,}2],$$

si accetta (non si respinge) l'ipotesi che la casa produttrice dichiari il vero.

Esempio

Dalla popolazione degli iscritti alla leva in un certo anno, si è rilevata l'altezza in centimetri di 25 unità statistiche scelte a caso, ottenendo le seguenti sintesi:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 4312{,}5 \qquad \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 744608{,}5.$$

c) Si verifichi l'ipotesi che μ non superi 170 cm con alternativa unilaterale, volendo commettere l'errore di prima specie con probabilità del 10%

d) Si verifichi l’ipotesi $\mu = 174$ cm con alternativa bilaterale, volendo commettere l’errore di prima specie con probabilità del 10%

e) Si verifichi l’ipotesi che la varianza dell’altezza sia pari a 25 cmq con alternativa bilaterale, volendo commettere l’errore di prima specie con probabilità del 5%

f) Si verifichi l’ipotesi che la varianza dell’altezza sia almeno pari a 30 cmq con alternativa unilaterale, volendo commettere l’errore di prima specie con probabilità dell’1%

Soluzione

c) $$\begin{aligned} &H_0 : \mu \leq 170 \\ &H_1 : \mu > 170 \end{aligned}$$

$\alpha = 0{,}1$

La varianza non è nota.

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S \big/ \sqrt{n}} > t_{1-\alpha}(n-1),$$

o, equivalentemente, se

$$\overline{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

$$\overline{x} = \frac{1}{25}\sum x_i = \frac{4312,5}{25} = 172,5$$

$$\sum(x_i - \overline{x})^2 = \sum x_i^2 - n\overline{x}^2 = 744608,5 - 25\cdot(172,5)^2 =$$
$$= 702,25$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \overline{x})^2 = \frac{702,25}{24} = 29,2604$$

$$S = \sqrt{29,2604} = 5,4093.$$

Si tratta di confrontare $\dfrac{172,5-170}{5,4093/\sqrt{25}} = 2,3108$ con $t_{0,9}(25-1) = 1,318$. Poiché il valore (empirico) 2,3108 supera quello teorico di 1,318, si rifiuta l'ipotesi nulla che l'altezza media della popolazione dei coscritti non ecceda 170 cm.

d) $\begin{matrix} H_0 : \mu = 174 \\ H_1 : \mu \neq 174 \end{matrix}$

$\alpha = 0,1$

Si rifiuta H_0 se

$$\frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{S/\sqrt{n}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

Poiché vale

$$\frac{|172{,}5-174|}{5{,}4093\big/\sqrt{25}}=\frac{1{,}5}{1{,}0819}=1{,}3864<t_{0,95}(24)=1{,}711,$$

si accetta l'ipotesi nulla che l'altezza media dei coscritti sia pari a 174 cm.

e) $\begin{array}{l} H_0:\sigma^2=25 \\ H_1:\sigma^2\neq 25 \end{array}$

$\alpha=0{,}05$

L'aspettativa dell'altezza non è nota.

Si rifiuta H_0 se vale

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma_0^2}\notin\left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1);\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right].$$

Poiché vale

$$\frac{702{,}25}{25}=28{,}09\in\left[\chi^2_{0,025}(24);\chi^2_{0,975}(24)\right]=[12{,}4;39{,}4],$$

si accetta l'ipotesi nulla che la varianza dell'altezza sia pari a 25 cmq (che lo scarto quadratico medio dell'altezza dei coscritti sia pari a 5 cm.)

f) $\begin{array}{l} H_0: \sigma^2 \geq 30 \\ H_1: \sigma^2 < 30 \end{array}$

$\alpha = 0{,}01$

Si rifiuta H_0 se vale

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma_0^2} < \chi_\alpha^2(n-1).$$

Poiché vale

$$\frac{702{,}25}{30} = 23{,}408\overline{3} > \chi_{0{,}01}^2(25-1) = 10{,}9,$$

Si accetta l'ipotesi che la varianza dell'altezza dei coscritti sia almeno pari a 30 cmq (che lo scarto quadratico medio sia almeno pari a $\sqrt{30} = 5{,}4772$ cm).

(Complementi e raccordi con argomenti di inferenza trattati nel corso di Statistica)

Verifiche d'ipotesi su proporzioni per grandi campioni.

Sia $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un campione casuale da una v.c. indicatore di parametro *p* (probabilità di successo). Allora, per quanto detto nella prima lezione, la v.c. $Y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ ha distribuzione binomiale di parametri *n* e *p*. Per il teorema del limite centrale, $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ ha, per *n* "grande", distribuzione normale standardizzata.

Ma, nel nostro caso,

$$\frac{Y}{n} = \bar{X} \equiv \hat{p}$$

$$E\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{E(Y)}{n} = \frac{np}{p} = p$$

$$Var\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{Var(Y)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Pertanto, per *n* "grande", la v.c.

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\frac{Y}{n}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

si approssima alla v.c normale standardizzata.

$H_0 : p \leq p_0$

$H_1 : p > p_0$

Si rifiuta H_0 se

$$\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_{1-\alpha}.$$

$H_0 : p \geq p_0$

$H_1 : p < p_0$

Si rifiuta H_0 se

$$\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_{1-\alpha}.$$

$H_0 : p = p_0$

$H_1 : p \neq p_0$

Si rifiuta H_0 se

$$\frac{|\hat{p}-p_0|}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Per una buona approssimazione è sufficiente che $n \geq 30$.

Intervalli di confidenza per proporzioni per grandi campioni

Per $n \geq 100$, vale

$$P\left\{ -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} = 1-\alpha.$$

Pertanto l'intervallo di confidenza a livello $100(1-\alpha)\%$ per p è il seguente:

$$\left\{ \hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right\}.$$

Verifiche d'ipotesi di eguaglianza di medie di due popolazioni

Teorema

Sia $(X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{1n_1})$ un campione casuale da una v.c. normale di aspettativa μ_1 e varianza σ_1^2. Sia $(X_{21}, X_{22}, \cdots, X_{2n_2})$ un campione casuale da una v.c. normale di aspettativa μ_2 e varianza σ_2^2. Siano fra loro indipendenti (cioè provengano da popolazioni differenti). Allora la v.c. $D = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$ ha distribuzione normale di aspettativa $\mu_1 - \mu_2$ e varianza $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$. *(Segue dimostrazione)*

Nel seguito si utilizzerà la seguente naturale simbologia:

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(X_{1i} - \overline{X}_1 \right)^2$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} \left(X_{2i} - \overline{X}_2 \right)^2 .$$

Si consideri il seguente problema di verifica d’ipotesi:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ nota

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ nota

Pertanto, come conseguenza del teorema precedente, si rifiuterà H_0 se

$$\frac{\left| \overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2) \right|}{\sqrt{\sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{\left| \overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 0 \right|}{\sigma \sqrt{\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2} \right)}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}} .$$

Nella pratica è molto raro conoscere il valore (comune) di σ^2.

Si consideri il seguente problema di verifica d'ipotesi:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ non nota

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ non nota.

In tale caso si propone per la stima di σ^2 il seguente stimatore:

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

che risulta corretto per σ^2 nell'ipotesi $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Infatti:

$$E\left(S^2\right) = \frac{(n_1 - 1)E\left(S_1^2\right) + (n_2 - 1)E\left(S_2^2\right)}{n_1 + n_2 - 2} =$$

$$= \sigma^2 \frac{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} = \sigma^2.$$

Dal fatto che , sotto H_0 la v.c. $\dfrac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2}$ ha distribuzione chi-quadrato con $(n_i - 1)$ g.d.l., $i = 1,2$, segue, per un teorema dimostrato precedentemente, che la variabile casuale

$\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}$ ha distribuzione chi-quadrato con (n_1+n_2-2) g.d.l..

Pertanto sotto H_0, per un teorema dimostrato precedentemente, vale

$$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\Big/\sigma\sqrt{\dfrac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2\Big/\sigma^2}{n_1+n_2-2}}}=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{S^2}\sqrt{\dfrac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}}=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{S\sqrt{\dfrac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}}$$

ha distribuzione *t di Student* con (n_1+n_2-2) g.d.l..

Si può ritenere ragionevole rifiutare l'ipotesi H_0 se

$$\frac{\left|\overline{X}_1-\overline{X}_2\right|}{S\sqrt{\dfrac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}}>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2).$$

Intervallo di confidenza per la differenza $(\mu_1-\mu_2)$ *fra le medie di due popolazioni normali*

Dal teorema precedente segue che, se è noto il valore di $\sigma^2=\sigma_1^2=\sigma_2^2$, vale:

$$P\left\{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}\right\}=$$

$$=1-\alpha$$

Pertanto,

$$\left[(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}};(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}\right]$$

è intervallo di confidenza al $100(1-\alpha)\%$ per la differenza $(\mu_1-\mu_2)$.

Se il valore di $\sigma^2=\sigma_1^2=\sigma_2^2$ non è noto, lo si stima tramite $S^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

Pertanto l'intervallo di confidenza per $(\mu_1-\mu_2)$, risulta avere per estremi i valori

$$\overline{X}_1-\overline{X}_2\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}.$$

Distribuzione campionaria asintotica della differenza fra due medie campionarie.

Sia $(X_{11},X_{12},\cdots,X_{1n_1})$ un campione casuale da una v.c. di aspettativa μ_1 e varianza σ_1^2. Sia $(X_{21},X_{22},\cdots,X_{2n_2})$ un campione casuale da una v.c. di aspettativa μ_2 e varianza σ_2^2. Siano fra loro indipendenti (cioè provengano da popolazioni differenti).

E' possibile dimostrare che, al divergere di n_1 e di n_2, la quantità

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

tende a distribuirsi come una normale standardizzata. Pertanto se $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, l'intervallo di confidenza per $(\mu_1 - \mu_2)$, risulta avere per estremi i valori

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

Per il problema di verifica d'ipotesi

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ non nota

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ non nota, Sotto H_0 la v.c. $\dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ tende, al divergere di n_1 e di n_2, alla normale standardizzata. Pertanto, la regione di rifiuto ha la forma:

$$\frac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Dal teorema precedentemente dimostrato, rimuovendo l'ipotesi $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, e applicando il teorema del limite centrale alla v.c. $D = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$, la quantità

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

tende al divergere di n_1 e di n_2, alla normale standardizzata. Pertanto, è possibile dimostrare che la v.c.

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}},$$

tende al divergere di n_1 e di n_2 ad una normale standardizzata.

L'approssimazione è soddisfacente se $n_1 \geq 100$ *e* $n_2 \geq 100$.

Pertanto, qualora non siano noti i valori (diversi) σ_1^2 e σ_2^2,l'intervallo di confidenza per $(\mu_1 - \mu_2)$, risulta avere per estremi i valori

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}.$$

Inoltre, con varianze non note (e diverse), si rifiuta l'ipotesi $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ se

$$\frac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$