

Matematica

1. Modelli matematici e relazioni funzionali

Giuseppe Vittucci Marzetti¹

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2019-20

¹Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

- 1 I modelli matematici
 - Elementi essenziali di un modello matematico
 - Fasi della modellizzazione matematica
- 2 Teoria degli insiemi
 - Insiemi: definizione e rappresentazione
 - Sottoinsiemi propri e impropri
 - Operazioni fondamentali con gli insiemi
 - Leggi di De Morgan
- 3 Le funzioni
 - Concetto di funzione
 - Quantificatori
 - Funzione composta
 - Funzioni iniettive e funzione inversa
- 4 Gli insiemi numerici e i grafici delle funzioni
 - Gli insiemi numerici
 - I numeri irrazionali
 - Grafici delle funzioni reali di variabile reale

Elementi essenziali di un modello matematico

La matematica è l'estensione del senso comune con altri mezzi.

(Ellenberg, 2014, p.30)

Modello matematico

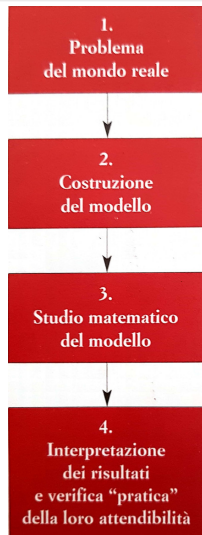
Costruzione di una particolare *riproduzione* della *realtà*, che permette di analizzarla matematicamente.

Nella definizione si ritrova il riferimento a:

- **realtà**: un particolare fenomeno fisico, biologico, economico o sociale.
- **riproduzione**: la realtà è troppo complessa per essere studiata compiutamente una volta riprodotta fotograficamente, e quindi la riproduzione diventa idealizzata e semplificata.
- **la modalità matematica di analisi**: la semplificazione della realtà è funzionale alla sua traduzione in formule, ovvero al suo successivo studio con il linguaggio della matematica.

Fasi della modellizzazione matematica

- 1 **Analisi del fenomeno.**
- 2 **Costruzione del modello**, individuando le grandezze del fenomeno e le loro reciproche relazioni che si ritengono essenziali.
- 3 **Studio matematico del modello.**
- 4 **Interpretazione e verifica empirica dei risultati.**

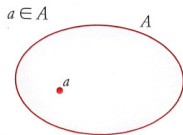


Modelli matematici e relazioni funzionali

- Il concetto di **funzione** e la **teoria delle funzioni** sono centrali nello studio delle relazioni tra le grandezze del fenomeno considerate.
- Due semplici esempi economici:
 - **Funzione di costo**: relazione tra la quantità prodotta di una certa merce e il costo totale di produzione della merce stessa.
 - **Funzione di domanda**: relazione tra il prezzo di un bene e la quantità domandata del bene stesso.
- Esistono casi in cui la corrispondenza non è tra numeri.
Es. la funzione che associa un tratto di curva all'area sottostante ad essa.
- Per trattare anche questi casi è necessario definire il concetto di funzione come corrispondenza tra elementi di due insiemi.

Concetti di insieme e appartenenza

- Assumiamo il concetto di **insieme** come **primitivo**, sinonimo di **collezione**, **classe**, **popolazione**.
- Indichiamo gli insiemi con le lettere maiuscole (es. A, B, \dots) e i loro elementi con le lettere minuscole (es. a, b, \dots).
- L'elemento a appartiene all'insieme A : $a \in A$
- L'elemento a non appartiene all'insieme A : $a \notin A$
- L'**insieme vuoto** (\emptyset) è un insieme che non possiede alcun elemento.
- Un insieme può essere rappresentato:
 - elencando i suoi elementi: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
 - ricorrendo ai **diagrammi di Venn**.



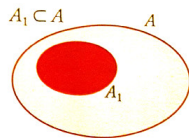
Sottoinsieme

- L'insieme A_1 è un **sottoinsieme** dell'insieme A quando ogni elemento di A_1 appartiene anche ad A :

$$A_1 \subseteq A$$

- A_1 è contenuto **propriamente** nell'insieme A quando A_1 è un sottoinsieme di A ed esiste almeno un elemento di A che non appartiene ad A_1 :

$$A_1 \subset A$$



Operazioni fondamentali con gli insiemi

- **Unione** di due insiemi A e B : l'insieme $A \cup B$ costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno degli insiemi A e B .
- **Intersezione** di due insiemi A e B : l'insieme $A \cap B$ costituito dagli elementi che appartengono sia ad A sia a B .
 - Due insiemi si dicono **disgiunti** quando non hanno elementi comuni:

$$A \cap B = \emptyset$$

- **Differenza** di due insiemi A e B : l'insieme $A \setminus B$ (leggiamo A meno B) costituito dagli elementi di A che non appartengono a B .
 - L'insieme $A \setminus B$ è l'insieme **complementare** di B rispetto ad A .
 - Quando è chiaro dal contesto rispetto a quale insieme si determina il complementare, il complementare di B può indicarsi con B^c (o \overline{B}).
- **Prodotto cartesiano** di due insiemi A e B è l'insieme $A \times B$ delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

Proprietà delle operazioni fondamentali con gli insiemi

- **Proprietà commutativa:**

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- **Proprietà associativa:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- **Proprietà distributiva:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- L'unione di due insiemi non disgiunti può esprimersi come unione di tre insiemi disgiunti non vuoti:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

Leggi di De Morgan

- **Prima legge di De Morgan:** il complementare dell'intersezione tra due insiemi è uguale all'unione dei complementari.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- **Seconda legge di De Morgan:** il complementare dell'unione tra due insiemi è uguale all'intersezione dei complementari.

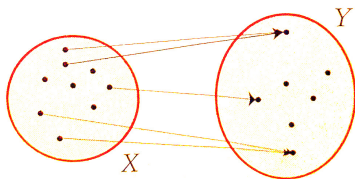
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Concetto di funzione

Dati due insiemi X e Y chiamiamo **funzione** da X in Y una corrispondenza **univoca**, che associa cioè a ogni $x \in X$ (al più) un unico $y \in Y$.

$$f : A \subseteq X \mapsto Y$$

- L'insieme di partenza X è chiamato **dominio** della funzione.
- L'insieme di arrivo Y è chiamato **codominio** della funzione.
- Il sottoinsieme A di X da cui partono le frecce è chiamato **insieme di definizione** (o **di esistenza**).
- Il sottoinsieme di Y dei valori assunti dalla funzione è detto **insieme delle immagini**.



Concetto di funzione

- A ogni elemento $x \in A$ attraverso f è associato un unico elemento $y \in Y$.
 - x è la **variabile indipendente**.
 - y è la **variabile dipendente**.
- La notazione $f(x)$ rappresenta quel particolare elemento di Y che è immagine tramite f di $x \in X$.

Quantificatori

- **Quantificatore universale:**

- \forall per ogni, per tutti.
- Per ogni x $P(x)$ è vera.

$$\forall x \ P(x)$$

- **Quantificatore esistenziale:**

- \exists esiste (almeno uno).
- Esiste almeno un x tale che $P(x)$ è vera.

$$\exists x : P(x)$$

- **Quantificatore esistenziale di unicità:**

- $\exists!$ esiste uno e un solo.
- Esiste uno e un solo x tale che $P(x)$ è vera.

$$\exists!x : P(x)$$

- **Negazione dei quantificatori**

- \nexists non esiste.
- Non esiste un x tale che $P(x)$ è vera.

$$\nexists x : P(x)$$

Funzione composta

- Siano date le funzioni

$$f : A \subseteq X \mapsto Y$$

$$g : Y \mapsto Z$$

- La **funzione composta** h mediante f e g , indicata con:

$$h = g[f] \quad \text{oppure} \quad h = g \circ f$$

è la funzione $h : A \subseteq X \mapsto Z$ che ad ogni $x \in A \subseteq X$ associa $g[f(x)]$.

Funzioni iniettive e funzione inversa

- Una funzione $f : A \subseteq X \mapsto Y$ si dice **iniettiva** quando elementi distinti di A hanno in Y immagini distinte. In simboli:

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ con } x_1 \neq x_2 \text{ si ha } f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Sia $f : A \subseteq X \mapsto Y$ una funzione iniettiva. La sua **funzione inversa**

$$f^{-1} : f(X) \subseteq Y \mapsto X$$

è la funzione che a ogni y associa la sua controimmagine.

- Se una funzione è iniettiva, $f(x) = y$ implica $x = f^{-1}(y)$.
- La funzione composta attraverso f e f^{-1} (in qualunque ordine considerate) è la funzione identità:

$$x = f^{-1}[f(x)]$$

$$y = f[f^{-1}(y)]$$

Gli insiemi numerici

- I principali insiemi numerici sono:

- \mathbb{N} , l'insieme dei **numeri naturali**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- \mathbb{Z} , l'insieme dei **numeri interi**;

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$$

- \mathbb{Q} , l'insieme dei **numeri razionali**, ovvero l'insieme di tutti i numeri che possono essere scritti sotto forma di frazione.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \pm \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$$

- \mathbb{R} , l'insieme dei **numeri reali**, composto dall'unione dell'insieme dei numeri razionali e **irrazionali**.
- Relazioni tra gli insiemi numerici:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Insiemi discreti, densi, discontinui e continui

- \mathbb{N} e \mathbb{Z} sono insiemi **discreti**.
- \mathbb{Q} è un insieme:
 - **denso**: $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \exists q_3 \in \mathbb{Q} : q_1 < q_3 < q_2$.
 - **discontinuo**: compresi tra due numeri razionali ce ne sono alcuni che sono **irrazionali**, ovvero non possono essere espressi come rapporto di due numeri interi.
- La scoperta dei numeri irrazionali viene tradizionalmente attribuita al pitagorico Ippaso di Metaponto (VI a.C.). Secondo la leggenda:
 - Ippaso scoprì i numeri irrazionali tentando di rappresentare la radice quadrata di 2 come frazione.
 - Credendo nell'assolutezza dei numeri, Pitagora non poteva accettare l'esistenza dei numeri irrazionali.
 - Non essendo in grado di confutare la dimostrazione, condannò Ippaso a morte e mantenne segreta l'esistenza degli irrazionali.



*Simbolismo mitologico
dei pitagorici:*

*1 principio primo;
2 principio femminile;
3 principio maschile;
4 elementi: terra, aria,
fuoco, acqua.*

Dimostrazione dell'esistenza dei numeri irrazionali

- Dimostrazione **per assurdo** che non esiste alcun $q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$.
 - Se tale q esistesse si avrebbe $(\pm \frac{m}{n})^2 = 2$ da cui $m^2 = 2n^2$.
 - Tale eguaglianza però non può essere soddisfatta perché in $2n^2$ il fattore 2 compare un numero dispari di volte, mentre in m^2 :
 - se m è dispari il fattore 2 non compare;
 - se m è pari il fattore 2 compare un numero pari di volte.
- Essendo la misura della diagonale d di un quadrato di lato l data da:

$$d = l\sqrt{2}$$

(applicazione del teorema di Pitagora) ed essendo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ne deriva che il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato è un numero irrazionale (i segmenti sono **incommensurabili**).

- I numeri razionali, sebbene infiniti dato un qualsiasi intervallo finito, non sono abbastanza “numerosi” da coprire il **continuo** della retta.

Grafici delle funzioni reali di variabile reale

- Data la funzione reale di variabile reale $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, chiamiamo il suo **grafico** l'insieme delle coppie (x, y) in cui x appartiene al campo di esistenza della funzione e y è il valore corrispondente a x :

$$\text{grf} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\}$$

- Es. `Plot[{x, x^2, x^3}, {x, -3, 3}, AxesLabel -> {x, y}]`

