Matematica

2. Funzioni, equazioni e disequazioni lineari e quadratiche

Giuseppe Vittucci Marzetti[1]

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2019-20

[1]Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

Prodotti e scomposizioni notevoli di polinomi

- Due esempi di **raccoglimento a fattor comune**:

$$a^2b + ab^2 = ab(a+b)$$

$$ac + ad + bc + bd = (a+b)(c+d)$$

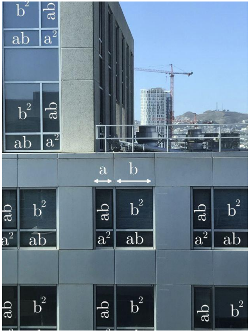
- **Prodotto di una somma per una differenza**:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

- **Quadrato di un binomio**:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$



Quadrato di binomio
$(a+b)^2 =$
$a^2 + b^2 + ab + ab$

Prodotti e scomposizioni notevoli di polinomi

- **Cubo di un binomio**:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

- **Somma** e **differenza di due cubi**:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Somma e differenza di frazioni algebriche

- Una **frazione algebrica** è il quoziente di due polinomi.
- Per calcolare la **somma/differenza di frazioni algebriche** occorre:
  - scomporre i denominatori in fattori;
  - determinare le condizioni di esistenza;
  - calcolare il minimo comune multiplo (mcm), ovvero prendere i fattori comuni e non comuni con il più grande esponente;
  - dividere il mcm per i denominatori e moltiplicare il risultato per i numeratori;
  - sommare/sottrarre i termini simili;
  - scomporre il numeratore e semplificarlo con il denominatore;
  - scrivere la frazione finale.
- Esempio:

$$
\begin{aligned}
\frac{x+3}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2-2x} &= \frac{x+3}{(x+2)(x-2)}+\frac{x-4}{x(x-2)} \\
&= \frac{x(x+3)}{x(x+2)(x-2)}+\frac{(x+2)(x-4)}{x(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{x^2+3x+x^2-4x+2x-8}{x(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2+x-8}{x^3-4x}
\end{aligned}
$$

Prodotto e quoziente di frazioni algebriche

- Per calcolare il **prodotto di frazioni algebriche** occorre:
  - scomporre i numeratori e i denominatori;
  - determinare le condizioni di esistenza, cioè in pratica escludere i valori che annullano uno o più denominatori;
  - eliminare i termini uguali che si trovano sia al numeratore sia al denominatore;
  - moltiplicare numeratore con numeratore e denominatore con denominatore
- Esempio:

$$\frac{x^2-4}{x^2-9}\cdot\frac{3x-9}{x^2-2x}=\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}}\cdot\frac{3\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-2)}}=\frac{3x+6}{x^2+3x}$$

- Per calcolare il **quoziente di frazioni algebriche** occorre riscrivere la prima frazione moltiplicata per l'inverso della seconda e poi procedere come per il prodotto.

Proprietà delle potenze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a\,b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Richiamo sui radicali

- Alle operazioni sui radicali è possibile applicare tutte le proprietà delle potenze semplicemente ricordando che:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

- **Nota bene**: come nel caso delle potenze, non è valida alcuna proprietà relativamente alla radice di una somma:

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

Funzioni crescenti e decrescenti

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ è detta

- **crescente in senso stretto** (o **monotòna crescente**) quando:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \text{ con } x_2 > x_1 \text{ si ha } f(x_2) > f(x_1)$$

- **crescente** (o **monotòna non decrescente**) quando:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \text{ con } x_2 > x_1 \text{ si ha } f(x_2) \geq f(x_1)$$

- **decrescente in senso stretto** (o **monotòna decrescente**) quando:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \text{ con } x_2 > x_1 \text{ si ha } f(x_2) < f(x_1)$$

- **decrescente** (o **monotòna non crescente**) quando:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \text{ con } x_2 > x_1 \text{ si ha } f(x_2) \leq f(x_1)$$

Combinazione lineare convessa

- Dati un insieme di elementi $x_1, x_2, \ldots x_n$ e un insieme di numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ tali che:

$$\lambda_k \geq 0 \quad \forall k \qquad\qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$$

allora

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$$

è una **combinazione lineare convessa** degli elementi $x_1, x_2, \ldots x_n$.

- Data una coppia di elementi x_1, x_2 e un numero reale $\lambda \in [0, 1]$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$$

è una combinazione lineare convessa degli elementi x_1 e x_2.

Combinazioni lineari convesse e funzioni concave e convesse

- Una funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ nell'intervallo I si dice
  - **convessa** se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $\forall\, \lambda \in [0,1]$ si ha
  $$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$
  - **concava** se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $\forall\, \lambda \in [0,1]$ si ha
  $$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \geq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$
- La funzione è **strettamente convessa** (**concava**), se vale la diseguaglianza stretta.

Funzioni pari e dispari

- Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con insieme di esistenza A simmetrico rispetto all'origine si dice:
    - **pari** quando $\forall x \in A$ si ha
    $$f(x) = f(-x)$$
    - **dispari** quando $\forall x \in A$ si ha
    $$f(x) = -f(-x)$$
- Il grafico di una funzione:
    - pari risulta simmetrico rispetto all'asse y (delle ordinate);
    - dispari risulta simmetrico rispetto all'origine degli assi.

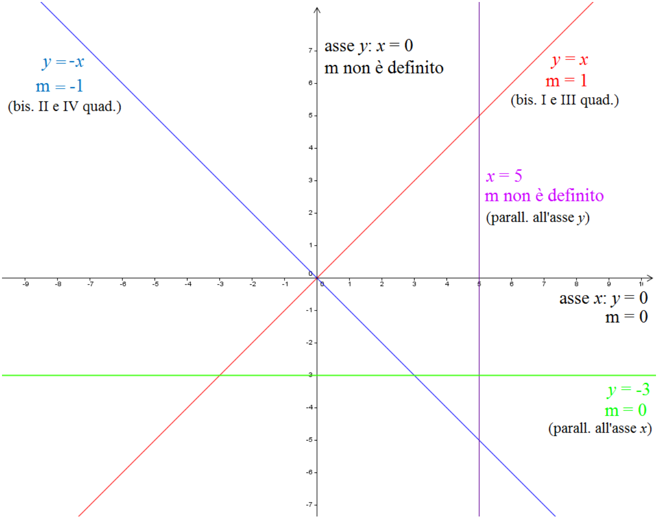
Funzioni lineari

- Le **funzioni lineari** (o **affini**) sono tutte le funzioni del tipo:

$$f(x) = q + m\,x$$

  dove:
  - $m \in \mathbb{R}$ è una costante chiamata **coefficiente angolare**.
    - rappresenta la **pendenza** della retta.
    - se positivo (negativo), la retta è inclinata positivamente (negativamente).
    - se uguale a 0, la retta è parallela all'asse delle ascisse.
    - due rette sono **parallele** se hanno lo stesso coefficiente angolare.
    - due rette sono **perpendicolari** quando il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1.
  - $q \in \mathbb{R}$ è una costante chiamata **intercetta**.
- Il grafico di una funzione lineare è una retta.
  - Se $q = 0$ la retta passa per l'origine degli assi.
  - Se $q = 0$ e $m \neq 0$ la funzione rappresenta grandezze che sono legate da rapporti di **proporzionalità**.

Funzioni lineari



Equazioni lineari

- Per un punto di coordinate (x_1, y_1):
  - passano infinite rette;
  - l'equazione del **fascio di rette** passanti per il punto è:

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

- Per due punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2):
  - passa una e una sola retta (primo postulato di Euclide);
  - l'**equazione della retta passante per due punti** è:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

  - La soluzione della seguente **equazione lineare** (o **di primo grado**), porta ad individuare il punto in cui la retta $y = mx + q$ interseca l'asse x:

$$0 = mx + q \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{q}{m}$$

Disequazioni lineari

- La **disequazione lineare** (o **di primo grado**):

$$m\,x + q > 0$$

individua l'insieme dei valori di x in corrispondenza dei quali la retta $y = m\,x + q$ si trova al di sopra dell'asse x.

- Es.: data la retta di equazione $y = -2x + 6$, l'insieme dei valori di x per i quali la retta si trova al di sopra dell'asse delle ascisse è:

$$-2x + 6 > 0, \qquad 2x < 6, \qquad x < 3$$

NB: cambiando il segno cambia anche il verso della disequazione.

- Una disequazione di primo grado in un'incognita può sempre ridursi alla forma:

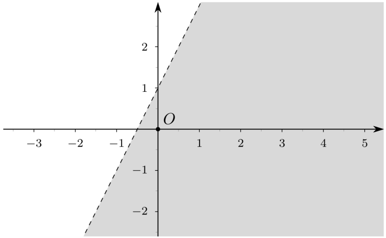
$$a\,x + b \lesseqgtr 0$$

Disequazioni lineari in due incognite

- Una **disequazione lineare in due incognite** (x e y) si può sempre porre nella forma:

$$ax + by + c \lesseqgtr 0$$

- Identificando $ax + by + c = 0$ una retta nel piano e dividendo una retta il piano in due semipiani, una disequazione di primo grado in due incognite ha come soluzioni tutti i punti di uno dei semipiani.
- Per sapere quale, basta scegliere un punto in uno dei due semipiani (fuori dalla retta origine) e verificare se la disequazione è soddisfatta.



La disequazione $2x - y + 1 > 0$

Fonte: Battaia, 2016.

Funzioni quadratiche

- Una **funzione quadratica** è una funzione reale di variabile reale ($f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$) della forma:

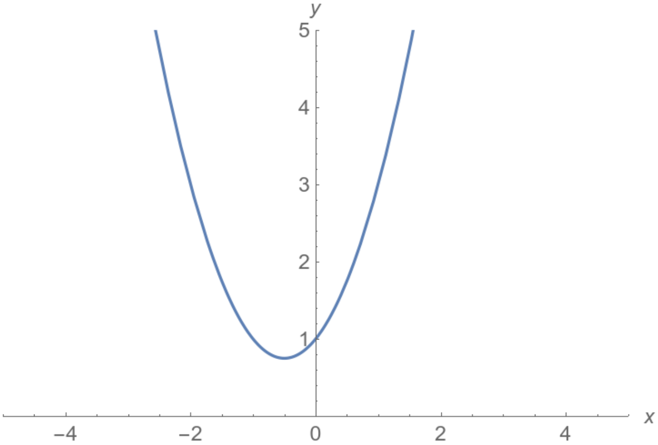
$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

  con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
- Il grafico associato a questo tipo di funzioni è una **parabola** con asse parallelo all'asse delle ordinate.
- Per disegnare la parabola è utile sapere che:
  - il segno di a determina la concavità/convessità della parabola:
    - se $a > 0$ la funzione è **convessa**;
    - se $a < 0$ la funzione è **concava**.
  - il **vertice** ha coordinate:

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

  - l'**intersezione con l'asse delle ordinate** è pari a c.

Esempio di parabola



$$f(x) = x^2 + x + 1$$

Esempio di sistema di equazioni lineari

- Per determinare l'equazione della parabola (con asse parallelo all'asse delle y) passante per tre punti, date le coordinate dei tre punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), si risolve un **sistema lineare** di tre equazioni in tre incognite (a, b, c).

$$\begin{cases} a\,x_1^2 + b\,x_1 + c = y_1 \\ a\,x_2^2 + b\,x_2 + c = y_2 \\ a\,x_3^2 + b\,x_3 + c = y_3 \end{cases}$$

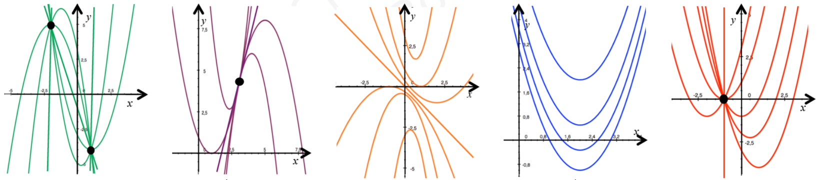
  NB: il sistema potrebbe non avere soluzioni o dare luogo ad una **parabola degenere** (una retta).

- Per determinare l'equazione della parabola con vertice nel punto (x_1, y_1) e passante per il punto (x_2, y_2) si risolve il seguente sistema lineare di tre equazioni in tre incognite (a, b, c).

$$\begin{cases} a\,x_1^2 + b\,x_1 + c = y_1 \\ a\,x_2^2 + b\,x_2 + c = y_2 \\ -b = x_1\,2a \end{cases}$$

I fasci di parabole

- Il fascio di parabole è l'insieme delle parabole che possiamo disegnare al variare delle costanti.
- Cinque tipi di fasci di parabole:
  - a. Parabole **secanti** in due punti;
  - b. Parabole **tangenti** in un punto base;
  - c. Parabole senza punti in comune;
  - d. Parabole **congruenti** con stesso asse di simmetria;
  - e. Parabole **congruenti** con un punto in comune.



a. b. c. d. e.

Fonte: Redooc.

Equazioni quadratiche

- Le **equazioni quadratiche** (o **di secondo grado**) in un'incognita sono del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0$$

- Per risolvere questa equazione si ricorre alla formula:

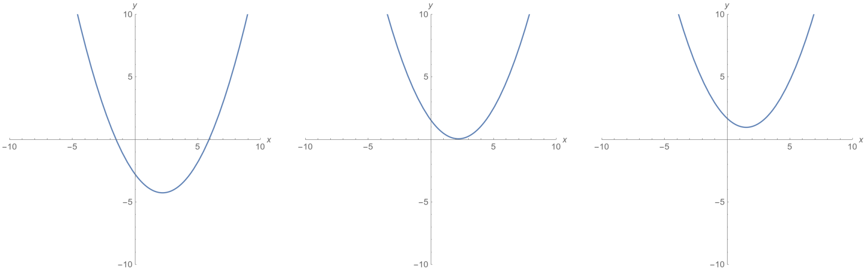
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  la quantità $\Delta = b^2 - 4ac$ (detto **discriminante**, o **delta**) determina il numero e la natura delle soluzioni:
  - due soluzioni distinte se $\Delta > 0$.
  - una soluzione se $\Delta = 0$ (soluzioni coincidenti, o soluzione doppia).
  - nessuna soluzione nell'insieme dei numeri reali se $\Delta < 0$.
    NB: In quest'ultimo caso l'equazione ha due soluzioni nell'insieme dei numeri complessi.
- Utilizzando le soluzioni dell'equazione (**radici** del polinomio) è possibile scomporre il polinomio in fattori:

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Interpretazione geometrica delle equazioni quadratiche

- Le soluzioni di un'equazione quadratica indicano i punti in cui la parabola associata interseca l'asse delle x.



(a) Due soluzioni (b) Una soluzione (c) Nessuna soluzione reale

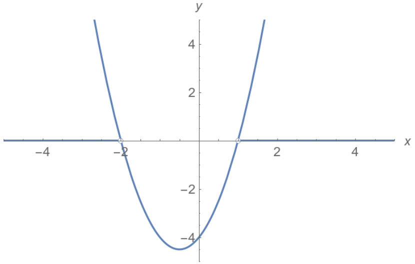
Disequazioni quadratiche in un'incognita

- Una **disequazione quadratica** (**di secondo grado**) in un'incognita può sempre esprimersi in una delle seguenti forme:

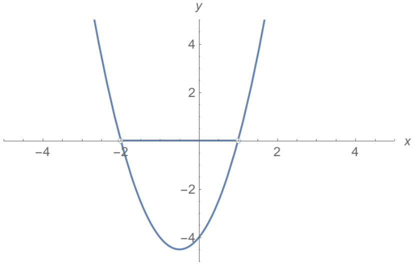
$$ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0$$

- Per risolverla occorre:
  - determinare le radici dell'equazione corrispondente;
  - considerare la parabola associata e valutare dal grafico quali sono le x che corrispondono alle porzioni della parabola che si trovano:
    - sopra l'asse delle ascisse, in caso di verso maggiore ($>$);
    - sotto l'asse delle ascisse, in caso di verso minore ($<$).

Esempi di disequazioni quadratiche in un'incognita

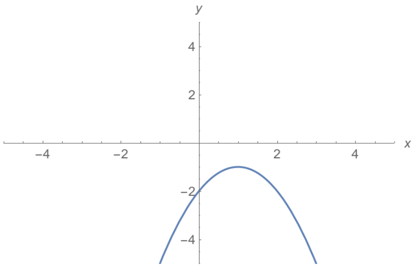


(a) $2x^2 + 2x - 4 \geq 0$, $x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$

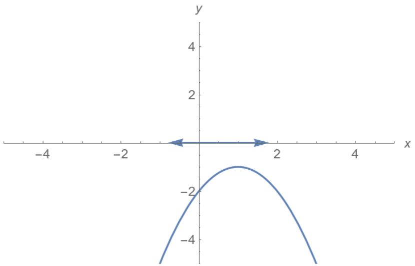


(b) $2x^2 + 2x - 4 < 0$, $x \in (-2, 1)$

Esempi di disequazioni quadratiche in un'incognita

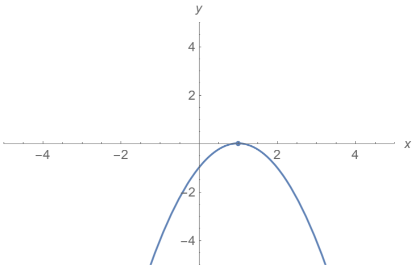


(a) $-x^2+2x-2 \geq 0$, Nessuna soluzione reale

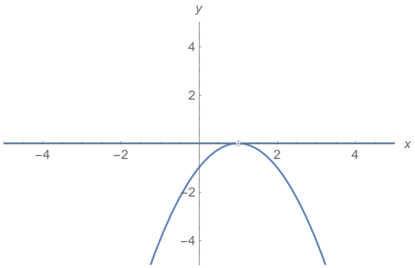


(b) $-x^2+2x-2 < 0$, $x \in (-\infty, \infty)$

Esempi di disequazioni quadratiche in un'incognita



(a) $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$, $x = 1$



(b) $-x^2 + 2x - 1 < 0$, $x \neq 1$