

Matematica

3. Iperboli, equazioni e disequazioni frazionarie

Giuseppe Vittucci Marzetti¹

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2019-20

¹Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

- 1 Iperboli
 - Proporzionalità inversa e iperbole equilatera
 - Funzioni omografiche e iperboli equilateri

- 2 Equazioni e disequazioni frazionarie
 - Equazioni frazionarie
 - Disequazioni scomponibili in fattori e disequazioni frazionarie

Proporzionalità inversa e iperbole equilatera

- Due grandezze x e y sono legate da **proporzionalità inversa** (sono **inversamente proporzionali**) se il loro prodotto rimane costante:

$$y x = a$$

- Es. base e altezza di un rettangolo di area costante.
- Il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

corrisponde ad una **iperbole equilatera** (con centro di simmetria nell'origine degli assi).

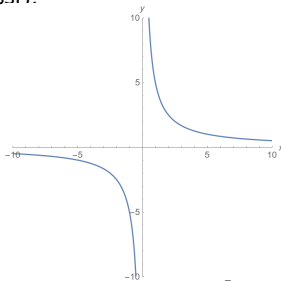


Figura: $f(x) = \frac{5}{x}$

Funzioni omografiche e iperboli equilatera

- Le funzioni del tipo

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0$$

dette **funzioni omografiche**, nel piano sono rappresentate da **iperboli equilatera** con **centro di simmetria** di coordinate:

$$C = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c} \right)$$

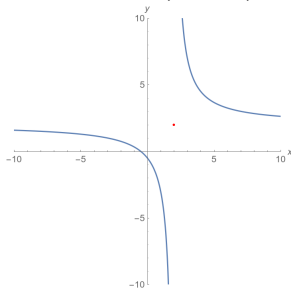
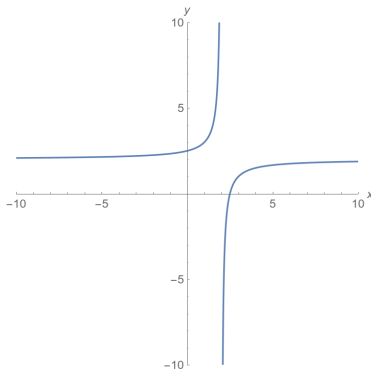


Figura: Parabola equilatera con centro di simmetria di coordinate (2,2)

Disegnare l'iperbole equilatera generata da una particolare funzione omografica

- Consideriamo la funzione: $f(x) = \frac{2x-5}{x-2}$
- Determiniamo
 - le coordinate del centro di simmetria dell'iperbole: $(-\frac{-2}{1}, \frac{2}{1}) = (2, 2)$
 - il punto di intersezione con l'asse delle ordinate per individuare l'iperbole effettiva: $f(0) = 5/2 = 2,5$



Un esempio economico: la funzione di costo medio

- La funzione di **costo medio** è data dal costo totale (C) diviso per la quantità prodotta (x):

$$f(x) = \frac{C}{x}$$

- Supponendo che il costo totale sia dato dalla seguente funzione della quantità:

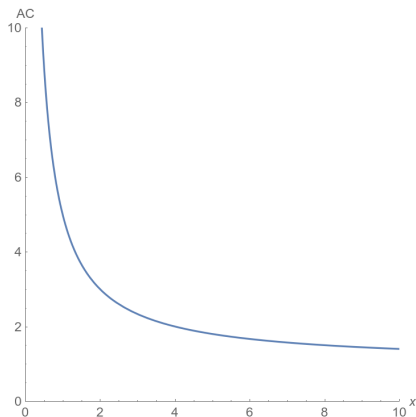
$$C(x) = c x + c_f$$

dove c e c_f sono due costanti positive che rappresentano rispettivamente il costo di ogni unità aggiuntiva e i costi fissi, la funzione dei costi medi sarà:

$$f(x) = \frac{c x + c_f}{x} = c + \frac{c_f}{x}$$

- Il grafico associato è un'iperbole equilatera con centro di simmetria $(0, c)$.
- Dei due rami dell'iperbole l'unico rilevante dal punto di vista economico è quello nel primo quadrante ($x > 0, y > 0$)

Un esempio economico: la funzione di costo medio



$$f(x) = 1 + \frac{5}{x}$$

Equazioni frazionarie

- In generale, un'**equazione fratta** (o **equazione frazionaria**) in un'incognita è un'equazione in cui sono presenti rapporti e l'incognita compare almeno una volta in uno dei denominatori.
- Per risolvere le equazioni fratte occorre:
 - 1 Determinare le **condizioni di esistenza**: considerare tutti i denominatori in cui compare l'incognita x ed escludere dalle possibili soluzioni i valori di x che annullano ciascuno dei denominatori.
 - 2 Ridurre alla forma normale:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 0$$

- 3 Ridurre ad un'equazione non fratta:

$$D(x) \frac{N(x)}{D(x)} = 0 \quad D(x) \Rightarrow \quad N(x) = 0$$

- 4 Determinare i valori di x che soddisfano l'equazione al punto 3 e le condizioni di esistenza individuate al punto 1.

Disequazioni scomponibili in fattori

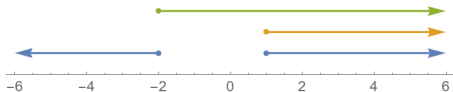
- Con una disequazione del tipo:

$$f(x) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0$$

se $f(x)$ può essere scomposta in fattori, per risolvere la disequazione può utilizzarsi la **regola dei segni**.

- Precisamente si determina:
 - il segno di ciascuno dei fattori: insieme di positività, insieme di negatività, insieme dei punti ove si annulla;
 - il segno del prodotto.
- Convieni utilizzare opportune rappresentazioni grafiche.
- Esempio:

$$x^2 + x - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 2)(x - 1) \geq 0$$



Disequazioni frazionarie

- Una **disequazione frazionaria** (o **disequazione fratta**) è una disequazione in cui l'incognita compare al denominatore.
- Per risolvere le disequazioni frazionarie occorre:
 - 1 Determinare le **condizioni di esistenza**: considerare tutti i denominatori in cui compare l'incognita x ed escludere dalle possibili soluzioni i valori di x che annullano ciascuno dei denominatori.
 - 2 Ridurre alla forma:

$$\frac{N(x)}{D(x)} \begin{matrix} \leq 0 \\ > 0 \end{matrix}$$
 - 3 Studiare separatamente il segno di numeratore e denominatore.
 - 4 Applicare la **regola dei segni** per determinare l'insieme delle soluzioni rispettando le condizioni di esistenza al punto 1.
- Esempio:

$$\frac{x^2 + 3x}{x + 1} \geq 0$$

