

ESERCIZIO 1 Disegnare le seguenti iperboli equilatera:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{-x+4}{2x+3}$

a) Ricordiamo che per disegnare l'iperbole equilatera generata da una particolare funzione omografica

del tipo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc \neq 0$

debiamo determinare:

- le coordinate del centro di simmetria dell'iperbole

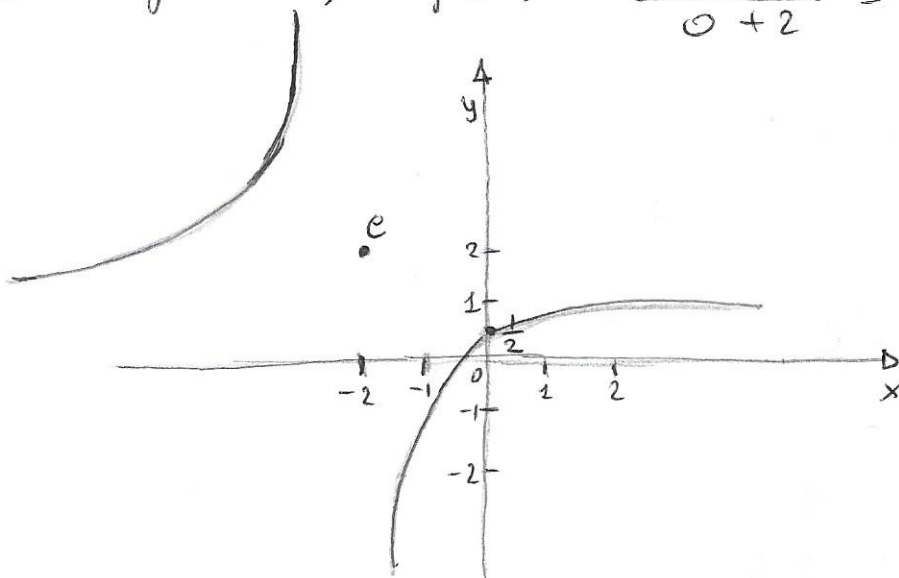
$$e = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

- il punto di intersezione con l'asse delle ordinate ($x=0$), cioè $f(x=0) = f(0)$

Nel nostro caso $e = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right) = \left(-\frac{2}{1}, \frac{2}{1}\right) = (-2, 2)$

e il punto di intersezione con l'asse delle ordinate

sarà $f(x=0) = f(0) = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 + 2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$



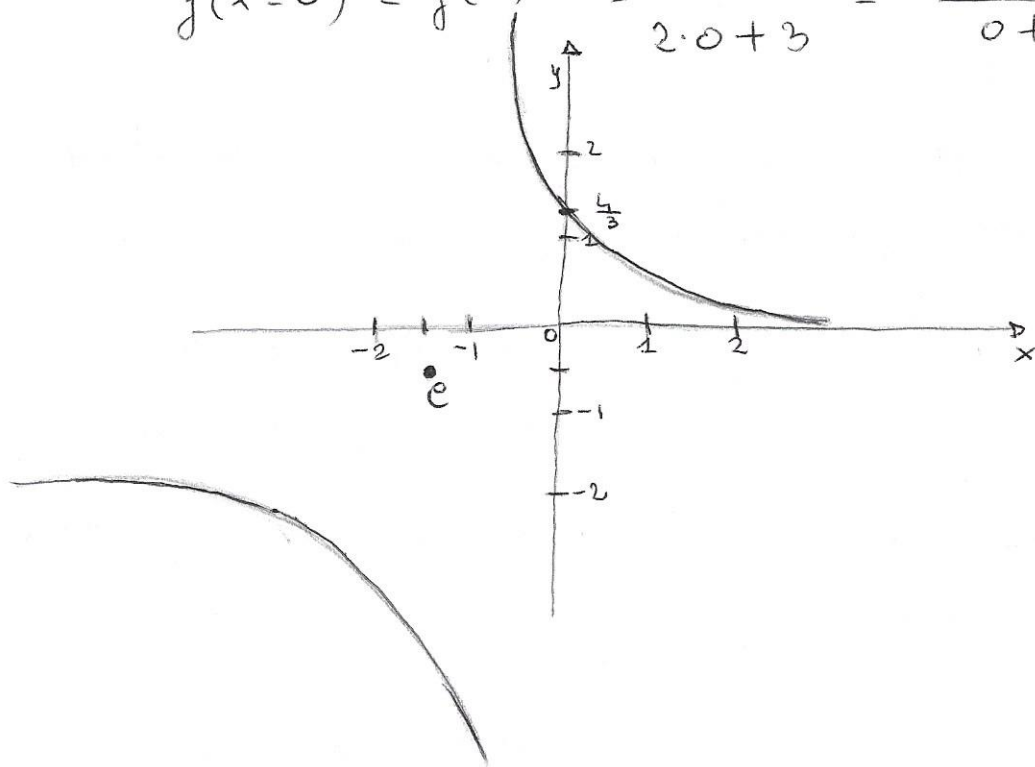
$$b) f(x) = \frac{-x+4}{2x+3}$$

L'iperbole equilatera avrà centro nel punto:

$$c = \left(-\frac{d}{e}, \frac{a}{e}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

il punto di intersezione con l'asse delle ordinate sarà:

$$f(x=0) = f(0) = \frac{-0+4}{2 \cdot 0+3} = \frac{-0+4}{0+3} = \frac{4}{3}$$



ESERCIZIO 2 Risolvere la seguente disequazione

$$(x^2-1)(x^2+4x+4) \geq 0$$

La disequazione può essere scomposta in fattori, dunque posso utilizzare la regola dei segni per risolverla

$$(x^2-1)(x^2+4x+4) \geq 0$$

$$(x-1)(x+1)(x+2)^2 \geq 0$$

$$(x-1)(x+1)(x+2)(x+2) \geq 0$$

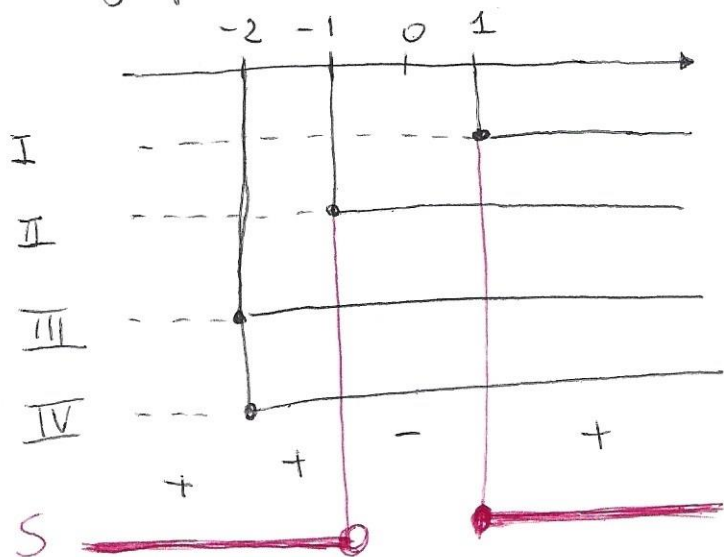
$$I) x-1 \geq 0 \quad x \geq 1$$

$$II) x+1 \geq 0 \quad x \geq -1$$

$$III) x+2 \geq 0 \quad x \geq -2$$

$$IV) x+2 \geq 0 \quad x \geq -2$$

Il grafico è:



$$S: x < -1 \vee x \geq 1$$

$$S: (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$$

ESERCIZIO 3 Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni frazionarie:

a) $\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x+1} = 0$

b) $\frac{x+1}{3(x-1)} - \frac{1+2x}{x+1} \geq \frac{3x-5x^2+6}{3(x-1)(x+1)}$

a) $\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x+1} = 0$

CE: 1) $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$
 2) $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

CE: $\forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \vee x \neq -2$

$$\frac{5(x+1) - 3(x+2)}{(x+2)(x+1)} = 0$$

$$\frac{5x+5 - 3x-6}{(x+2)(x+1)} = 0$$

$$\frac{2x-1}{(x+2)(x+1)} = 0$$

$$\frac{(2x-1)(\cancel{x+2})(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+2})(\cancel{x+1})} = 0 \cdot (x+2)(x+1)$$

$$2x-1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

La soluzione $x = \frac{1}{2}$ soddisfa la condizione di esistenza, dunque è la soluzione della equazione frazionaria (a)

$$b) \frac{x+1}{3(x-1)} - \frac{1+2x}{x+1} \geq \frac{3x-5x^2+6}{3(x-1)(x+1)}$$

$$c \in : 1) x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$2) x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$c \in : \forall x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x \neq \pm 1$$

$$\frac{(x+1)(x+1) - (1+2x)3(x-1)}{3(x-1)(x+1)} \geq \frac{3x-5x^2+6}{3(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{(x+1)(x+1) - 3(1+2x)(x-1) - 3x + 5x^2 - 6}{3(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{x^2+2x+1 - 3(x-1+2x^2-2x) - 3x + 5x^2 - 6}{3(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{\cancel{x^2} + 2x + 1 - 3\cancel{x} + 3 - 6\cancel{x^2} + 6\cancel{x} - 3\cancel{x} + 5\cancel{x^2} - 6}{3(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{2x - 2}{3(x-1)(x+1)} \geq 0$$

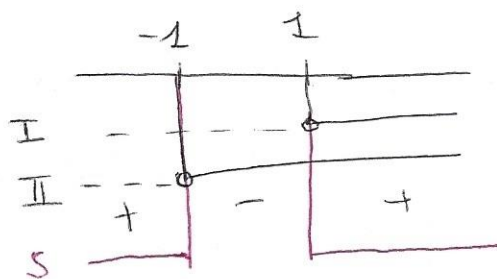
$$N: 2x - 2 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{2} \quad x \geq 1$$

$$D: 3(x-1)(x+1) > 0$$

$$I \quad x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

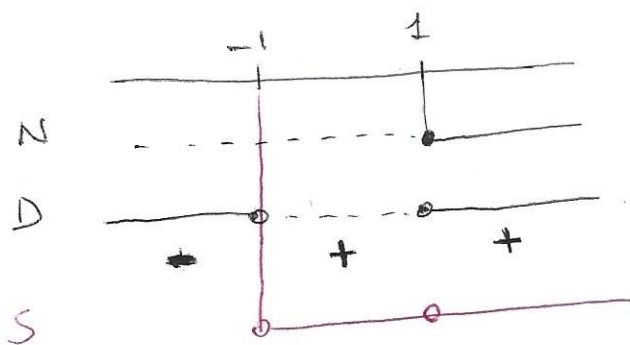
$$II \quad x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

grafico del denominatore :



$$S: x < -1 \quad \vee \quad x > 1$$

grafico della disequazione frazionaria



$$S: -1 < x < 1 \quad \vee \quad x > 1$$

$$S: (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

compatibile con la condizione di esistenza

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1$$

ESERCIZIO 4 Ra ppresentare i grafici delle seguenti funzioni potenza, evidenziando il dominio e l'insieme delle immagini:

a) $y = x^6$

b) $y = x^7$

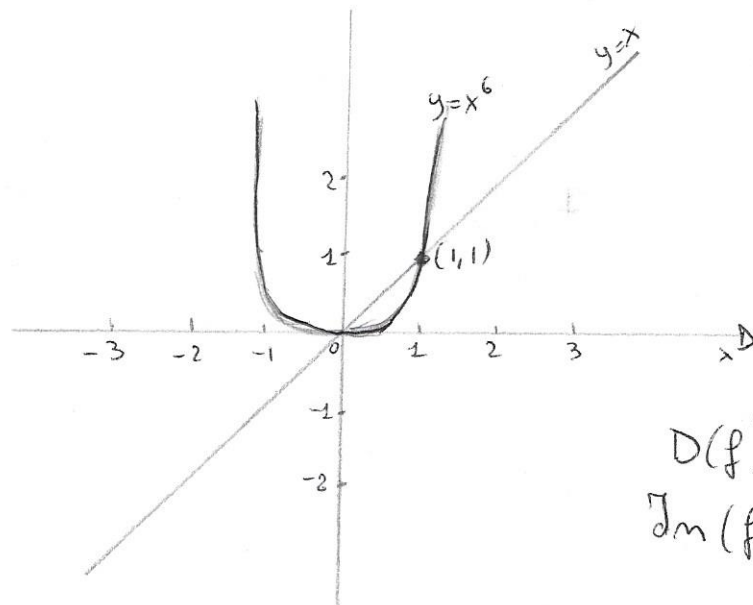
c) $y = x^{\frac{1}{4}}$

d) $y = x^{\frac{1}{5}}$

a) $y = x^6$

(1) Ricordiamo che il grafico della funzione potenza $f(x) = x^n$ passa sempre per il punto $(1,1)$, inoltre, (2) se n è pari le funzioni sono funzioni pari (con diagramma simmetrico rispetto all'asse delle ordinate) - (3) Nell'intervallo $x \in (0,1)$ il grafico passa al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante e, all'aumentare di n , si discosta sempre più da essa -

(4) Nell'intervallo $x \in (1, +\infty)$, il grafico passa al di sopra della bisettrice del primo e terzo quadrante e, all'aumentare di n , si discosta sempre più da essa -

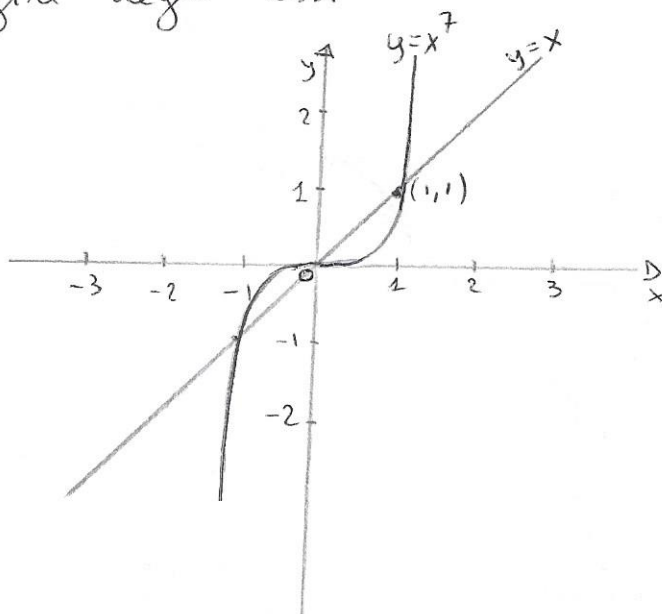


$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) = [0, +\infty)$$

$$b) y = x^7$$

Ricordiamo che valgono le (1), (3), (4) del caso a), inoltre per n dispari la funzione è dispari (con diagramma simmetrico rispetto all'origine degli assi)



$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$Im f = \mathbb{R}$$

$$c) y = x^{\frac{1}{4}}$$

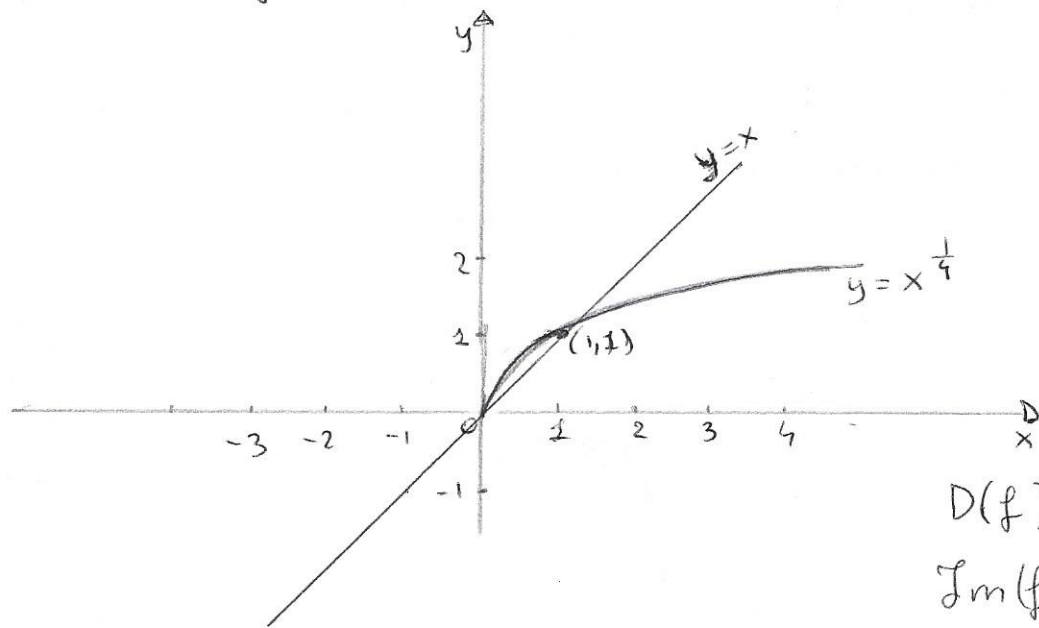
Ricordiamo alcuni elementi utili per visualizzare l'andamento delle funzioni potenza con esponente frazionario positivo

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} \quad m, n \in \mathbb{N}^+$$

- 1) Tutti i grafici passano per il punto $(1, 1)$
- 2) Nell'intervallo $x \in (0, 1)$, il grafico passa al di sopra della bisettrice del primo e terzo quadrante e, all'aumentare di n , si discosta sempre più da essa
- 3) Nell'intervallo $x \in (1, +\infty)$, il grafico passa al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante e, all'aumentare di n , si discosta sempre più da essa.

Nel caso $y = x^{\frac{1}{4}}$ valgono 1), 2) e 3), si ha inoltre che essendo il denominatore dell'esponente pari la

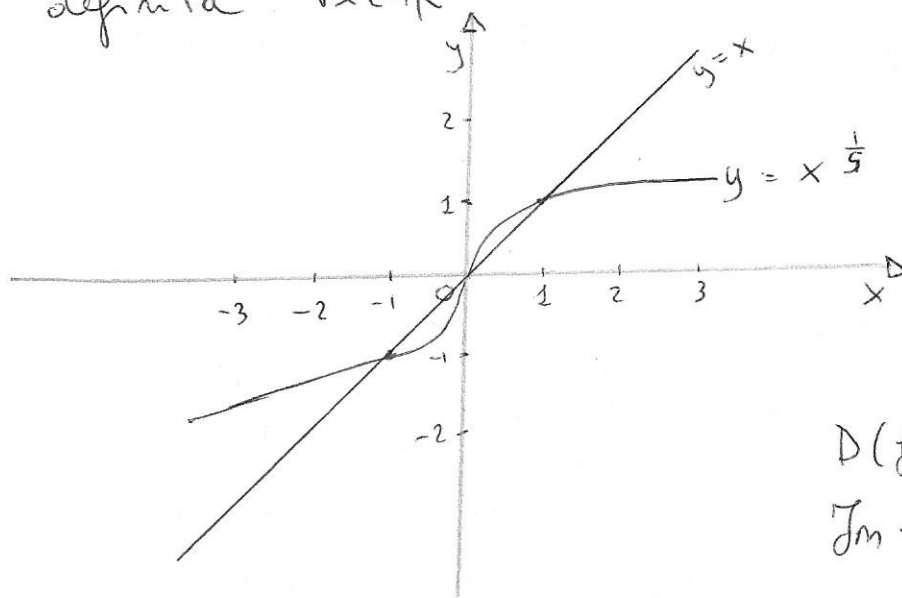
funzione esiste solo per $x \geq 0$ ed è sempre positiva ad eccezione di $f(0) = 0$ -



$D(f) = [0, +\infty)$
 $Im(f) = [0, +\infty)$

d) $y = x^{\frac{1}{5}}$

Anche per $y = x^{\frac{1}{5}}$ valgono le 1), 2) e 3) inoltre la funzione $y = x^{\frac{1}{5}}$ ha denominatore dell'esponente dispari quindi è definita $\forall x \in \mathbb{R}$



$D(f) = \mathbb{R}$
 $Im f = \mathbb{R}$

ESERCIZIO 5 Risolvere le seguenti equazioni

a) $\sqrt{x-3} = 5-x$

b) $\sqrt[3]{x^3-5x-4} = x-1$

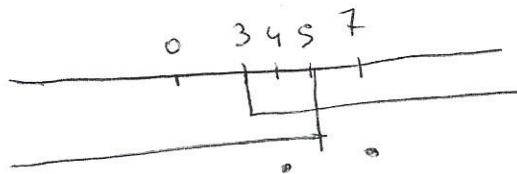
c) $\sqrt[4]{3x^2-2x+25} = \sqrt{3-2x}$

a)
$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x-3 = (5-x)^2 \end{cases} ; \begin{cases} x \geq 3 \\ -x \geq -5 \\ x-3 = 25 + x^2 - 10x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \\ -x^2 + 11x - 28 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 28 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+11 \pm \sqrt{121 - 112}}{2} = \begin{cases} \frac{11-3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{11+3}{2} = \frac{14}{2} = 7 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \\ x_1 = 4 \quad x_2 = 7 \end{cases}$$



L'unica soluzione accettabile è $x=4$

b) $\sqrt[3]{x^3-5x-4} = x-1$

$x^3 - 5x - 4 = (x-1)^3$

$x^3 - 5x - 4 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$\cancel{x^3} - 5x - 4 - \cancel{x^3} + 3x^2 - 3x + 1 = 0$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{+8 \pm \sqrt{64 + 36}}{6} = \begin{cases} \frac{8-10}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \\ \frac{8+10}{6} = \frac{18}{6} = 3 \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} \quad x_2 = 3$$

e) $\sqrt[4]{3x^2 - 2x + 25} = \sqrt{3-2x}$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x + 25 \geq 0 \\ 3 - 2x \geq 0 \\ 3x^2 - 2x + 25 = (3-2x)^2 \end{cases}$$

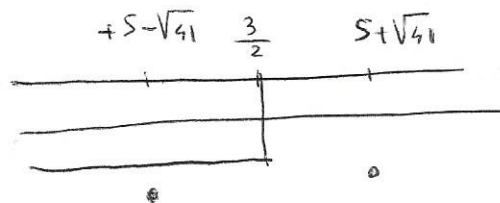
$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 300 < 0 \\ -2x \geq -3 \\ 3x^2 - 2x + 25 = 9 - 12x + 4x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \leq \frac{3}{2} \\ -x^2 + 10x + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \leq \frac{3}{2} \\ x^2 - 10x - 16 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \leq \frac{3}{2} \\ x_{1,2} = \end{cases}$$

$$\frac{+10 \pm \sqrt{100 + 64}}{2} = \begin{cases} \frac{10 - 2\sqrt{41}}{2} \\ \frac{10 + 2\sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \leq \frac{3}{2} \\ x_1 = 5 - \sqrt{41} \quad x_2 = 5 + \sqrt{41} \end{cases}$$



$x = 5 - \sqrt{41}$ unica
soluzione accettabile

ESERCIZIO 6 Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali

a) $\sqrt{6x+1} \geq 3-2x$

b) $\sqrt{x+1} \leq 5-x$

c) $\sqrt[3]{8+x^3} > x-4$

Ricordiamo che $\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$ con n pari si risolve

a)
$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^n \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Nel nostro caso $\sqrt{6x+1} \geq 3-2x$ è equivalente a

$$\begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ 6x+1 \geq (3-2x)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 3-2x < 0 \\ 6x+1 \geq 0 \end{cases}$$

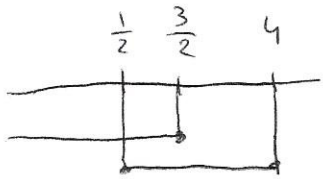
$$\begin{cases} -2x \geq -3 \\ 6x+1 \geq 9-12x+4x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x < -3 \\ 6x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \leq 3 \\ 6x+1-9+12x-4x^2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x > 3 \\ x \geq -\frac{1}{6} \end{cases}$$

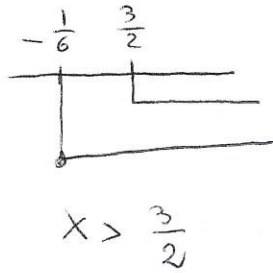
$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ -4x^2+18x-8 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 4x^2-18x+8 \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{1}{6} \end{array} \right.$$



$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$



$$x > \frac{3}{2}$$

$$S: \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \cup x > \frac{3}{2}$$

$$S: \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right] \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right) = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

b) Ricordiamo che $\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$ con n pari si risolve

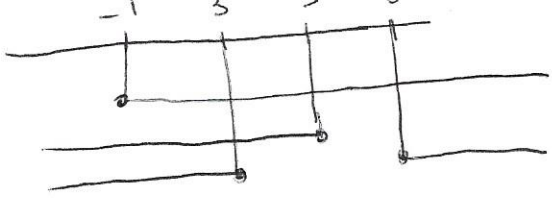
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^n \end{cases}$$

Nel nostro caso $\sqrt{x+1} \leq 5-x$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x+1 \leq (5-x)^2 \end{cases} ; \begin{cases} x \geq -1 \\ -x \geq -5 \\ x+1 \leq 25-10x+x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 5 \\ x+1-25+10x-x^2 \leq 0 \end{cases} ; \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 5 \\ -x^2+11x-24 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 5 \\ x^2-11x+24 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 5 \\ x \leq 3 \cup x \geq 8 \end{cases}$$



$$-1 \leq x \leq 3$$

$$S: [-1, 3]$$

c) Ricordiamo che $\sqrt[n]{f(x)} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} g(x)$ con n dispari
 si risolve attraverso la disequazione
 $f(x) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} [g(x)]^n$

Nel nostro caso

$$\sqrt[3]{8+x^3} > x-4$$

$$8+x^3 > (x-4)^3$$

$$8+x^3 > x^3 + 3x^2(-4) + 3x(-4)^2 + (-4)^3$$

$$8+x^3 > x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

$$8 + \cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 12x^2 - 48x + 64 > 0$$

$$12x^2 - 48x + 72 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2304 - 3456 = -1152 < 0$$

$$S: \forall x \in \mathbb{R}$$

$$S: (-\infty, +\infty)$$