

Matematica

5. Funzioni, equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

Giuseppe Vittucci Marzetti¹

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2019-20

¹Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

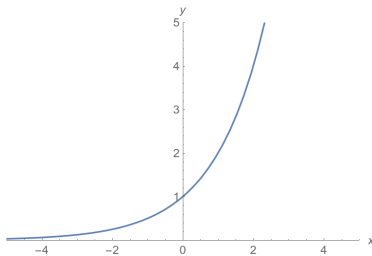
- 1 Funzioni esponenziali
 - Funzione esponenziale
 - Progressione geometrica
 - Capitalizzazione semplice, composta e continua
- 2 Funzioni logaritmiche
 - Funzione logaritmica
 - Proprietà dei logaritmi
- 3 Equazioni e disequazioni esponenziali
 - Equazioni esponenziali
 - Disequazioni esponenziali
- 4 Equazioni e disequazioni logaritmiche
 - Equazioni logaritmiche
 - Disequazioni logaritmiche

Funzione esponenziale

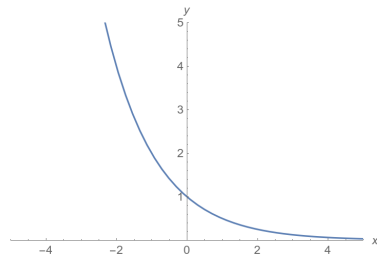
- La **funzione esponenziale** di base a è una funzione del tipo:

$$f(x) = a^x, \quad a > 0$$

- Sempre positiva.
- Definita $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Strettamente convessa.
- Strettamente crescente (decrescente) se $a > 1$ ($0 < a < 1$).



(a) $f(x) = 2^x$



(b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

Progressione geometrica

- Una **progressione geometrica** (o **successione geometrica**) è una successione di numeri tali che il rapporto tra un elemento e il suo precedente è costante.
- Tale costante è chiamata **ragione della successione**.

$$f(1) = a \cdot f(0) = a$$

$$f(2) = a \cdot f(1) = a^2$$

$$\vdots$$

$$f(x) = a \cdot f(x-1) = a^x$$

- Ogni variabile (es. popolazione, PIL, livello generale dei prezzi) con un tasso di variazione costante evolve in progressione geometrica:

$$f(x) = (1 + g)^x x_0$$

dove g è una costante maggiore di -1 .

Tasso di crescita e crescita geometrica

- Si ha **crescita geometrica** (o **esponenziale**) di una variabile quando il suo tasso di crescita è costante:

$$\frac{\Delta N_t}{N_{t-1}} = \frac{N_t - N_{t-1}}{N_{t-1}} = g \quad N_t = (1 + g)N_{t-1}$$

- Sostituendo si ha:

$$\begin{aligned} N_t &= (1 + g)N_{t-1} = (1 + g)(1 + g) N_{t-2} = (1 + g)^2 N_{t-2} = \dots \\ &= (1 + g)^t N_0 \end{aligned}$$

- La leggenda indiana della nascita degli scacchi mostra la potenza della crescita geometrica:
 - l'inventore chiese al suo principe per l'invenzione un chicco di riso per la prima casella, due per la seconda, quattro per la terza e così via ($g = 1$), e il principe inopinatamente acconsentì...
 - ...ma solo per l'**ultima casella** il principe doveva:

$$1(1 + 1)^{63} = 2^{63} = 9.223.372.036.854.775.808 \text{ chicchi}$$

una quantità più grande del raccolto mondiale.

Capitalizzazione semplice

- Supponiamo di prestare nel periodo 0 un **capitale** di valore C_0 (**principal sum**) (es. 1000 euro) al **tasso di interesse** annuo r (es. 10% annuo, ovvero $r = 0,1$).
- Assumiamo altresì che gli interessi ci siano corrisposti una volta l'anno alla fine del periodo di riferimento (**interessi posticipati**).
- Dopo un anno (all'inizio del periodo 1) si avrà:

$$C_1 = C_0 + r C_0 = (1 + r) C_0.$$

- Nel nostro esempio, prestati al tasso di interesse annuo del 10% 1000 euro dopo un anno diventano 1100 euro.
- In regime di **capitalizzazione semplice (simple interest)**, in cui è solo il capitale iniziale a fruttare interessi, dopo t anni si avrà:

$$C_t = C_0 + t r C_0 = C_0(1 + r t)$$

- Nel nostro esempio, prestati a un tasso di interesse annuo costante del 10%, con interesse semplice, dopo 20 anni i nostri 1000 euro saranno diventati 3000 euro ($1000 \times (1 + 20 \times 0,1)$).

Capitalizzazione composta

- In regime di **capitalizzazione composta (compound interest)**, in cui gli interessi maturati vengono via via aggiunti al capitale e fruttano anche loro interessi, dopo t anni si avrà:

$$C_t = (1 + r)C_{t-1} = (1 + r)^2C_{t-2} = \dots = (1 + r)^t C_0.$$

- Nel nostro esempio, prestati a un tasso di interesse annuo costante del 10%, con interesse composto dopo 20 anni i nostri 1000 euro saranno diventati circa 6727,5 euro ($1000 \times 1,1^{20}$).

Capitalizzazione frazionata

- Se l'interesse annuo r è pagato semestralmente in due tranches (ognuna della metà del valore) e imputato a capitale si ha:

$$C_t = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t} C_0$$

- In generale, supponendo che l'interesse annuale r venga corrisposto in m frazioni costanti durante il corso dell'anno e subito imputato a capitale si ha:

$$C_t = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} C_0$$

- Questa è la cosiddetta **capitalizzazione frazionata**.

Capitalizzazione continua

- Quando la frequenza m tende a infinito (la capitalizzazione degli interessi avviene istante per istante, in modo continuo) si ha il caso di **capitalizzazione continua**:

$$C_t = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} C_0$$

- Uno dei **limiti notevoli** è:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

dove e è il cosiddetto **numero di Eulero** (o **numero di Nepero**), numero irrazionale uguale a circa 2,7183.

- Utilizzando il precedente limite notevole si deriva:

$$C_t = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} C_0 = \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}} \right)^{rt} C_0 = e^{rt} C_0$$

Funzione logaritmica

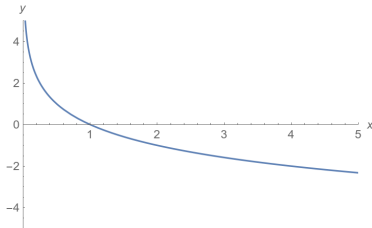
- La **funzione logaritmica** è la funzione inversa di quella esponenziale:

$$y = \log_a x \quad \leftrightarrow \quad x = a^y$$

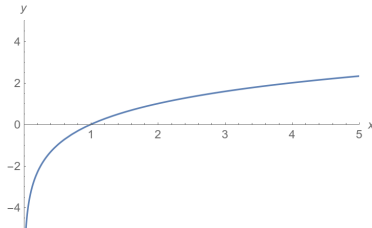
- Il logaritmo in **base** a di x (con $a > 0$ e $a \neq 1$) identifica il valore y a cui elevare la base a per ottenere l'**argomento** x .
- Come nel caso dell'esponenziale vanno distinti i casi:

$$0 < a < 1$$

$$a > 1$$

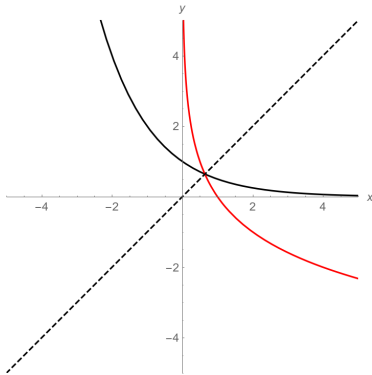


(a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

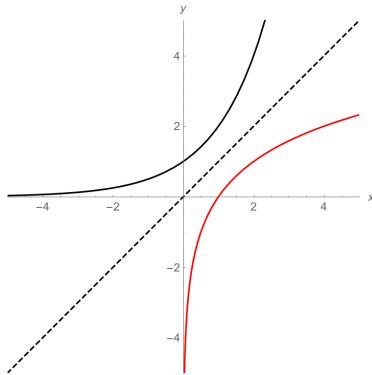


(b) $f(x) = \log_2 x$

Funzione esponenziale e logaritmica

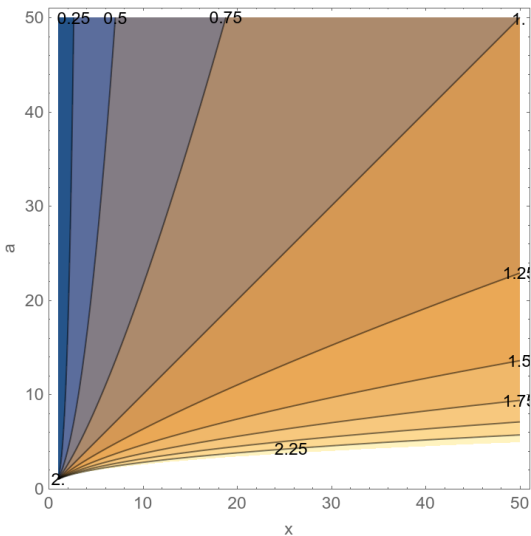


(a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (nera) e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (rossa)



(b) $y = 2^x$ (nera) e $y = \log_2 x$ (rossa)

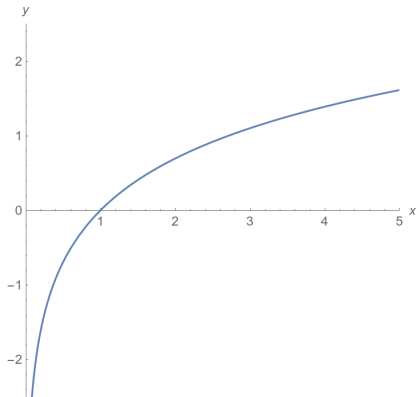
Valore di $\log_a x$ per diversi valori di $a (> 1)$ e $x (> 0)$



Logaritmo naturale

- Il **logaritmo naturale** è il logaritmo in base e , dove e è il numero di Nepero:

$$f(x) = \log_e x = \ln x$$



Proprietà dei logaritmi

- Essendo il logaritmo la funzione inversa dell'esponenziale (e quindi l'esponenziale la funzione inversa del logaritmo) si ha:

$$x = \log_a a^x = a^{\log_a x}$$

- Ricordando che il logaritmo è definito solo per valori strettamente positivi dell'argomento, per i logaritmi valgono le seguenti proprietà:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^k = k \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Dimostrazioni delle proprietà dei logaritmi

- Logaritmo di un prodotto uguale alla somma dei logaritmi:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^m \cdot a^n) = \log_a a^{m+n} = m + n = \log_a x + \log_a y$$

- Dimostrazione della formula del cambio di base:

$$x = x$$

$$a^{\log_a x} = b^{\log_b x}$$

$$(b^{\log_b a})^{\log_a x} = b^{\log_b x}$$

$$b^{\log_b a \cdot \log_a x} = b^{\log_b x}$$

$$\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Equazioni esponenziali

- Le **equazioni esponenziali** sono equazioni in cui compaiono funzioni esponenziali e in cui l'incognita compare in almeno un esponente.
- I metodi di risoluzione sono vari e possono essere classificati in base alla forma normale a cui può essere ricondotta l'equazione.
 - Equazioni esponenziali elementari.
 - Equazioni esponenziali con termine noto esponenziale e con incognita.
 - Equazioni esponenziali per sostituzione.
 - Equazioni esponenziali con il metodo grafico.
 - Equazioni esponenziali con base variabile.

Equazioni esponenziali elementari

- Le **equazioni esponenziali elementari** sono quelle riconducibili alla forma normale:

$$a^{f(x)} = b, \quad a > 0, a \neq 1$$

- Con
 - $b \leq 0$, l'equazione non ha soluzioni.
 - $b > 0$, l'equazione è determinata. Per ricavare la soluzione è sufficiente applicare il logaritmo ad entrambi i membri:

$$f(x) = \log_a b$$

- Esempio:

$$10^{2x^2} = 5$$

$$2x^2 = \log_{10} 5$$

$$x^2 = \frac{\log_{10} 5}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\log_{10} 5}{2}} \approx \pm 0,591$$

Equazioni esponenziali elementari: esempio

- Calcolare il tempo t necessario affinché una quantità C ($C > 0$) che cresce in modo esponenziale al tasso g ($g > 0$) (es. popolazione, malati, ricavi, produzione, capitale, ecc.) raddoppi.

$$C(1 + g)^t = 2C$$

$$(1 + g)^t = 2$$

$$t = \log_{1+g} 2 = \frac{\ln 2}{\ln(1 + g)}$$

- Con g positivo ma relativamente piccolo ($g \leq 0,05$) si ha $\ln(1 + g) \approx g$, da cui:

$$t \approx \frac{\ln 2}{g} \approx \frac{0,7}{g}$$

- Quando g è espresso in termini percentuali (es. la popolazione mondiale cresce al 2% annuo) per ottenere in modo approssimato il numero di periodi necessari al raddoppio è quindi sufficiente dividere 70 per il tasso di crescita (es. $70/2 = 35$ anni).

Equazioni esponenziali con termine noto esponenziale e con incognita

- Le **equazioni esponenziali con termine noto esponenziale e con incognita** sono quelle riconducibili alla forma normale:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$$

- Per ricavare la soluzione è sufficiente:
 - applicare il logaritmo ad entrambi i membri;
 - utilizzare la formula del cambio di base.

$$\log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)}$$

$$f(x) = \frac{\log_b b^{g(x)}}{\log_b a}$$

$$f(x) = \frac{1}{\log_b a} g(x)$$

Equazioni esponenziali con termine noto esponenziale e con incognita: esempio

- Esempio:

$$2^{3x} = 3^{x+1}$$

- Per risolvere occorre applicare il logaritmo a entrambi i membri:

$$\log_2 2^{3x} = \log_2 3^{x+1}$$

- Applicare la regola del cambio di base:

$$3x = \frac{\log_3 3^{x+1}}{\log_3 2}$$

$$3x = \frac{x+1}{\log_3 2}$$

- Risolvere l'equazione:

$$(3 \log_3 2 - 1)x = 1$$

$$x = \frac{1}{3 \log_3 2 - 1} = \frac{1}{\log_3 \frac{8}{3}} \approx 1,12$$

Equazioni esponenziali per sostituzione

- Nelle **equazioni esponenziali per sostituzione** non si ha una specifica forma normale di riferimento.
- Il metodo di sostituzione prevede di sostituire il termine esponenziale ripetuto con una nuova incognita, in modo da ricondurre l'equazione ad uno dei casi noti.

- Esempio:

$$-2^x + 4^{x-\frac{1}{2}} - 4 = 0$$

$$-2^x + (2^2)^{x-\frac{1}{2}} - 4 = 0$$

$$-2^x + \frac{(2^x)^2}{2} - 4 = 0$$

- Sostituendo $y = 2^x$ abbiamo:

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$y_1 = -2, \quad y_2 = 4$$

- Le due equazioni esponenziali associate ($2^x = y_{1,2}$) danno come soluzione: $x = \log_2 4 = 2$.

Equazioni esponenziali con il metodo grafico

- Data un'equazione della forma:

$$a^{f(x)} = g(x)$$

in cui l'incognita non compare solo all'esponente, l'unico metodo per avere un'idea delle soluzioni è il metodo grafico.

- Occorre scrivere l'equazione come un sistema:

$$\begin{cases} y = a^{f(x)} \\ y = g(x) \end{cases}$$

e tracciare i grafici delle due curve.

- Le ascisse dei punti di intersezione delle due curve costituiscono le soluzioni dell'equazione.

Equazioni esponenziali con base variabile

- Nelle **equazioni esponenziali con basi variabili** compaiono termini della forma

$$[f(x)]^{g(x)}$$

- Il metodo di risoluzione consiste in:
 - imporre le condizioni di esistenza relative all'esponenziale con base variabile:

$$f(x) > 0$$

- sfruttare la relazione tra logaritmo ed esponenziale:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln([f(x)]^{g(x)})} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

Disequazioni esponenziali

- La classificazione delle **disequazioni esponenziali** e i relativi metodi di soluzione sono analoghi a quelli delle equazioni esponenziali.
- NB: se la **base è compresa tra 0 ed 1**, la funzione esponenziale è strettamente decrescente e il **verso della disequazione va cambiato**.
- Esempio. Nel risolvere la seguente disequazione

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$$

- se $a > 1$, è sufficiente risolvere la disequazione: $f(x) \geq g(x)$.
- se $0 < a < 1$, è necessario cambiare il verso e risolvere la disequazione: $f(x) \leq g(x)$.

Equazioni logaritmiche

- Le **equazioni logaritmiche** sono equazioni in cui l'incognita compare almeno una volta nell'argomento o nella base di un logaritmo.
- La classificazione dei metodi di risoluzione è analoga a quella delle equazioni esponenziali:
 - equazioni logaritmiche elementari: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$;
 - equazioni logaritmiche risolvibili con il passaggio all'esponenziale:
 $\log_a f(x) = b$;
 - equazioni logaritmiche risolvibili per sostituzione;
 - equazioni logaritmiche risolvibili con il metodo grafico;
 - equazioni logaritmiche con incognita nella base.
- In linea generale dobbiamo:
 - imporre le condizioni di esistenza:
 - argomento del logaritmo positivo;
 - base del logaritmo positiva e diversa da 1.
 - ricondursi a una forma nota e applicare il metodo risolutivo adatto.
 - stabilire se le soluzioni ottenute sono accettabili.

Disequazioni logaritmiche

- Le **disequazioni logaritmiche** sono disequazioni in cui l'incognita compare come argomento di un logaritmo.
- I casi principali sono quelli che possono essere ricondotti alle seguenti due forme normali:

$$\log_a f(x) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} c \quad (1)$$

$$\log_a f(x) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \log_b g(x) \quad (2)$$

Primo tipo di disequazione logaritmica

- Disequazione logaritmica riconducibile alla forma normale:

$$\log_a f(x) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} c$$

- Ponendo la disequazione e le condizioni di esistenza a sistema e ricordando che $c = \log_a a^c$, per risolverla occorre risolvere il sistema:

- con $a > 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} a^c \end{cases}$$

- con $0 < a < 1$ (il verso della seconda disequazione va invertito):

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} a^c \end{cases}$$

- Caso particolare è quello in cui $c = 0$, da cui segue che $a^c = 1$.

Secondo tipo di disequazione logaritmica

- Disequazione logaritmica riconducibile alla forma normale:

$$\log_a f(x) \gtrless \log_b g(x)$$

- Ponendo la disequazione e le condizioni di esistenza a sistema si ha:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \log_a f(x) \gtrless \log_b g(x) \end{cases}$$

- Utilizzando la regola del cambio di base e le proprietà dei logaritmi, l'ultima disequazione nel sistema può essere ricondotta alla forma:

$$\log_a f(x) \gtrless \log_a \left[g(x)^{\frac{1}{\log_a b}} \right]$$

Secondo tipo di disequazione logaritmica

- Vanno distinti i casi in cui:

- con $a > 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} g(x)^{\frac{1}{\log_a b}} \end{cases}$$

- con $0 < a < 1$ il verso della seconda disequazione va invertito:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} g(x)^{\frac{1}{\log_a b}} \end{cases}$$