

Matematica

6. Funzioni, equazioni e disequazioni con valore assoluto

Giuseppe Vittucci Marzetti¹

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2019-20

¹Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

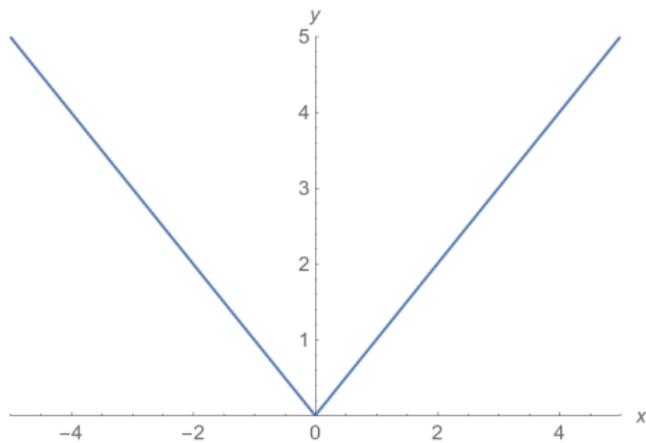
Layout

- 1 Funzione valore assoluto
- 2 Equazioni con valore assoluto
 - Equazioni con un valore assoluto
 - Equazioni con due (o più) valori assoluti
 - Equazioni con valore assoluto incapsulato
- 3 Diseguazioni con valore assoluto
 - Diseguazioni con un valore assoluto
 - Diseguazioni con due (o più) valori assoluti
 - Disuguaglianza triangolare

Valore assoluto

- Il **valore assoluto** (o **modulo**) di un numero reale x è una funzione che associa a x il numero stesso se x è maggiore o uguale a zero, e il suo opposto se x è negativo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{con } x \geq 0 \\ -x & \text{con } x < 0 \end{cases}$$



Equazioni con valore assoluto

- Le **equazioni con valore assoluto** (o **equazioni con modulo**) sono equazioni in cui l'incognita compare all'interno di almeno un valore assoluto.
- Queste equazioni si risolvono studiando il segno degli argomenti dei vari valori assoluti, in modo da eliminarli esplicitando i segni degli argomenti.

Equazioni con un valore assoluto e termine noto costante

- Le **equazioni con un valore assoluto e termine noto costante** hanno la seguente forma normale:

$$|f(x)| = k$$

dove $f(x)$ è un polinomio a coefficienti reali o una frazione algebrica e k una generica costante reale.

- Con
 - $k < 0$, l'equazione non ammette soluzioni;
 - $k = 0$, l'equazione equivale a:

$$f(x) = 0$$

- $k > 0$

$$f(x) = -k$$

∨

$$f(x) = k$$

Equazioni con un valore assoluto e termine noto variabile

- Le **equazioni con un modulo e termine noto variabile** hanno forma normale:

$$|f(x)| = g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono polinomi a coefficienti reali o frazioni algebriche.

- Questo tipo di equazioni equivale all'unione di due sistemi misti:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Equazioni con due valori assoluti

- Le **equazioni con due valori assoluti** che hanno la forma normale:

$$|f(x)| = |g(x)|$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono polinomi a coefficienti reali o frazioni algebriche.

- In tal caso non è necessario porre condizioni di concordanza dei segni.
- L'insieme delle soluzioni coincide con l'unione degli insiemi delle soluzioni delle equazioni:

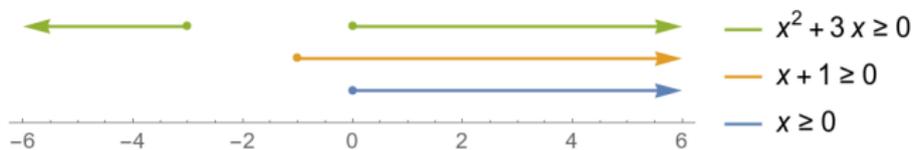
$$f(x) = g(x) \quad \vee \quad f(x) = -g(x)$$

Equazioni con due o più valori assoluti

- Il metodo di risoluzione delle **equazioni con due o più valori assoluti** è analogo a quello delle equazioni con un valore assoluto e con termine noto variabile.
- Per risolverle occorre:
 - 1 studiare il segno degli argomenti di ciascun valore assoluto presente nell'equazione;
 - 2 disegnare lo schema dei segni ottenuti al punto precedente;
 - 3 risolvere ogni equazione sul rispettivo intervallo di competenza;
 - 4 escludere le soluzioni così ottenute che non rientrano nei rispettivi intervalli di competenza;
 - 5 unire gli insiemi di soluzioni accettabili.

Equazioni con due o più valori assoluti: esempio

$$|x^2 + 3x| + |x + 1| = |x|$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq -3 \\ x^2 + 3x - 1 = 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} -3 < x < -1 \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \end{array} \right. \cup$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x < 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq -3 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} -3 < x < -1 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x < 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right\} \cup \emptyset \cup \emptyset$$

Equazioni con un valore assoluto dentro l'altro

- Nelle **equazioni con un valore assoluto incapsulato** occorre applicare i metodi di risoluzione precedenti **dall'esterno all'interno**:
 - Occorre studiare le condizioni relative ai segni degli argomenti più esterni, eliminando così i valori assoluti più esterni.
 - Il procedimento va ripetuto studiando i valori assoluti via via più interni e i relativi sotto-casi.
- Qualche condizione relativa ai segni degli argomenti può tradursi in tal caso in una disequazione con valore assoluto.

Disequazioni con valore assoluto

- Le **disequazioni con valore assoluto** sono disequazioni in cui l'incognita compare all'interno di almeno un valore assoluto.
- Queste disequazioni si risolvono in modo analogo alle equazioni con valore assoluto, studiando il segno degli argomenti dei vari valori assoluti, in modo da eliminarli esplicitando i segni degli argomenti.

Disequazioni con un valore assoluto e termine noto costante

- Le **disequazioni con un valore assoluto e termine noto costante** hanno la seguente forma normale:

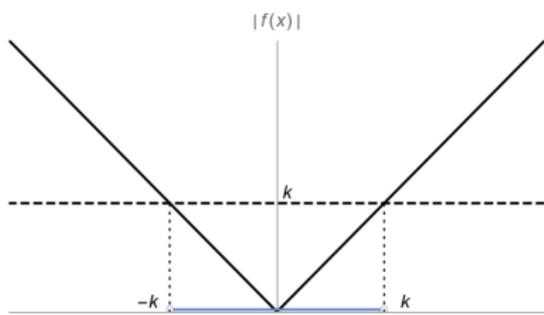
$$|f(x)| \gtrless k$$

- $|f(x)| < k$
 - $k \leq 0$, la disequazione non ammette soluzioni;
 - $k > 0$, la disequazione equivale a: $-k < f(x) < k$.
- $|f(x)| > k$
 - $k \leq 0$, la disequazione è sempre soddisfatta;
 - $k > 0$, la disequazione equivale a: $f(x) < -k \vee f(x) > k$.

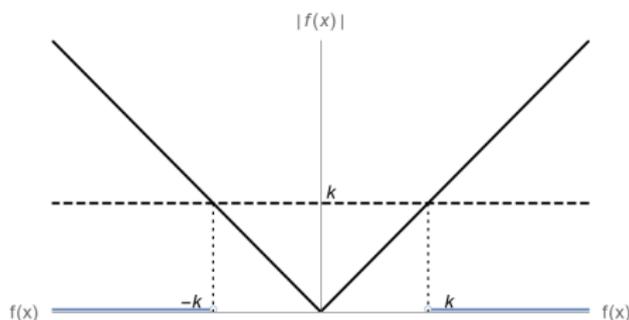
Diseguazioni con un valore assoluto e termine noto costante positivo

$$|f(x)| \geq k$$

$$k > 0$$



(a) $|f(x)| < k$, $-k < f(x) < k$



(b) $|f(x)| > k$, $f(x) < -k \vee f(x) > k$

Disequazioni con un valore assoluto e termine noto variabile

- Le **disequazioni con un valore assoluto e termine noto variabile** hanno la seguente forma normale:

$$|f(x)| \gtrless g(x)$$

- Questo tipo di disequazioni equivale all'unione di due sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \gtrless g(x) \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) \gtrless g(x) \end{cases}$$

Diseguazioni con due (o più) valori assoluti

- Il metodo di risoluzione delle **diseguazioni con due o più valori assoluti** è analogo a quello già visto per le equazioni.
- Per risolverle occorre:
 - 1 studiare il segno degli argomenti di ciascun valore assoluto;
 - 2 disegnare lo schema dei segni attraverso cui determinare gli intervalli in cui va studiata la disequazione.
 - 3 risolvere ogni equazione sul rispettivo intervallo di competenza;
 - 4 escludere le soluzioni così ottenute che non rientrano nei rispettivi intervalli di competenza;
 - 5 unire gli insiemi di soluzioni accettabili.

Disuguaglianza triangolare

- Una disuguaglianza notevole che coinvolge i valori assoluti di due variabili è la cosiddetta **disuguaglianza triangolare**:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

- In particolare, quando x e y hanno segni:
 - **discordi**, vale la disuguaglianza in senso stretto;
 - **concordi**, vale l'uguaglianza.