# ESERCITAZIONE V

28-11-2018

**ESERCIZIO 1** Disegnare le seguenti funzioni esponenziali e logaritmiche:

a) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ $\qquad y = \log_{\frac{1}{5}} x$

b) $y = 3^x$ $\qquad y = \log_3 x$

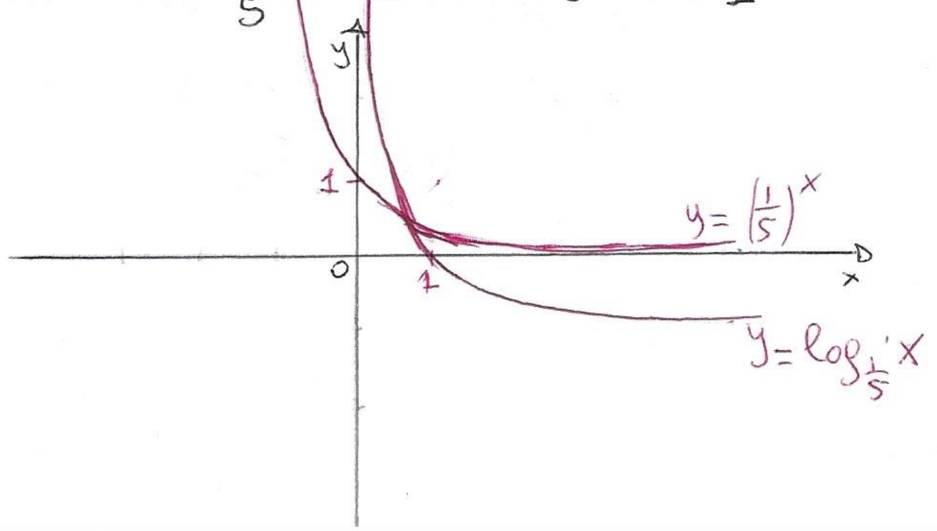
a) Ricordiamo che la funzione esponenziale di base a è una funzione del tipo $f(x) = a^x$, $a > 0$

- sempre positiva
- Definita $\forall x \in \mathbb{R}$
- strettamente convessa
- strettamente crescente (decrescente) se $a > 1$ $(0 < a < 1)$

La funzione logaritmica è la funzione inversa di quella esponenziale $y = \log_a x \iff x = a^y$
Come nel caso dell'esponenziale vanno distinti i casi $0 < a < 1$ e $a > 1$.

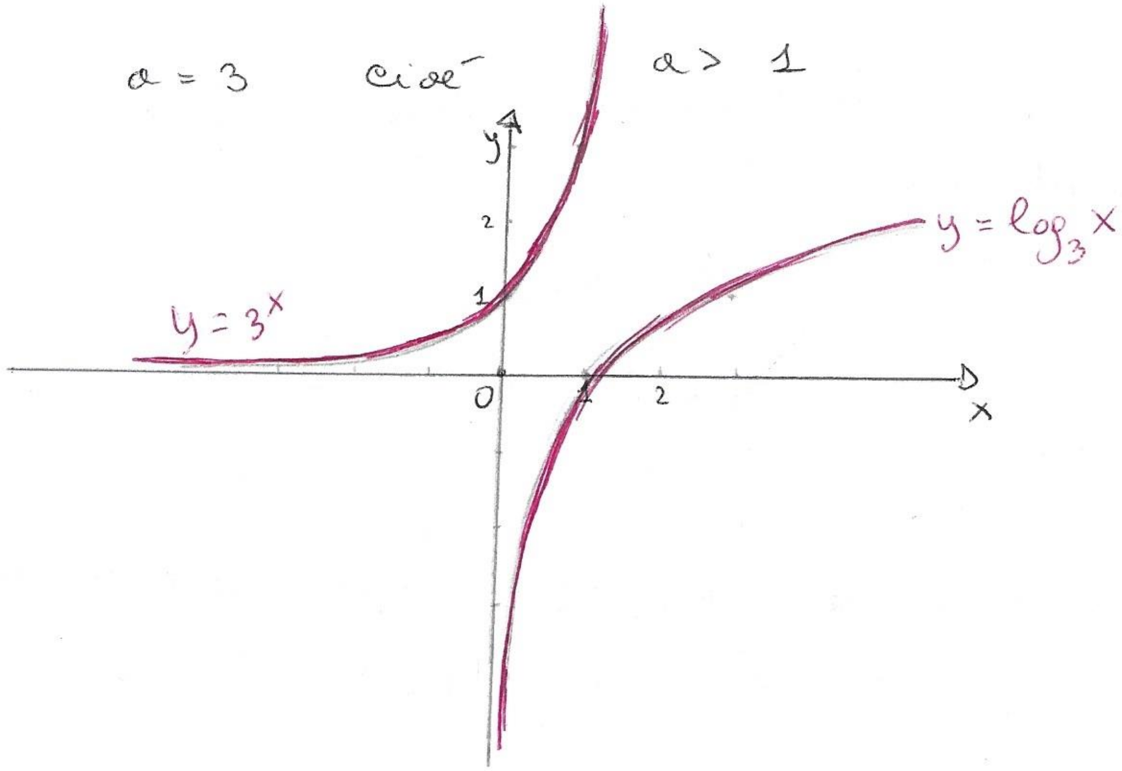
Nel nostro caso $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ $\qquad y = \log_{\frac{1}{5}} x$

abbiamo $a = \frac{1}{5}$ cioè $0 < a < 1$



b) Nel caso $y = 3^x$ $\quad y = \log_3 x$

$a = 3$ cioè $a > 1$




ESERCIZIO 2 Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

a) $3^{3x} = \frac{1}{27}$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = 9$

c) $3^{x+1} = 2x - 1$

a) $3^{3x} = \frac{1}{27}$

equazione esponenziale elementare cioè riconducibile alla forma $a^{f(x)} = b$ con $a > 0$ e $a \neq 1$
poiché $b > 0$ l'equazione è determinata e per ricavare la soluzione è sufficiente applicare il logaritmo ad entrambi i membri

$$f(x) = \log_a b$$

$$3^{3x} = \frac{1}{27}$$

$$3^{3x} = 27^{-1}$$

$$3^{3x} = 3^{-3}$$

$$\log_3 3^{3x} = \log_3 3^{-3}$$

$$\log_3 3^{3x} = -3 \log_3 3$$

$$3x = -3 \quad ; \quad x = -1$$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = 9$ equazione esponenziale elementare con $a > 0$ e $a \neq 1$ ~~e~~ $b > 0$

$$\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = \log_{\frac{1}{4}} 9$$

$$x + 1 = \log_{\frac{1}{4}} 9$$

$$x = \log_{\frac{1}{4}} (3^2) - 1$$

$$x = 2 \log_{\frac{1}{4}} 3 - 1$$

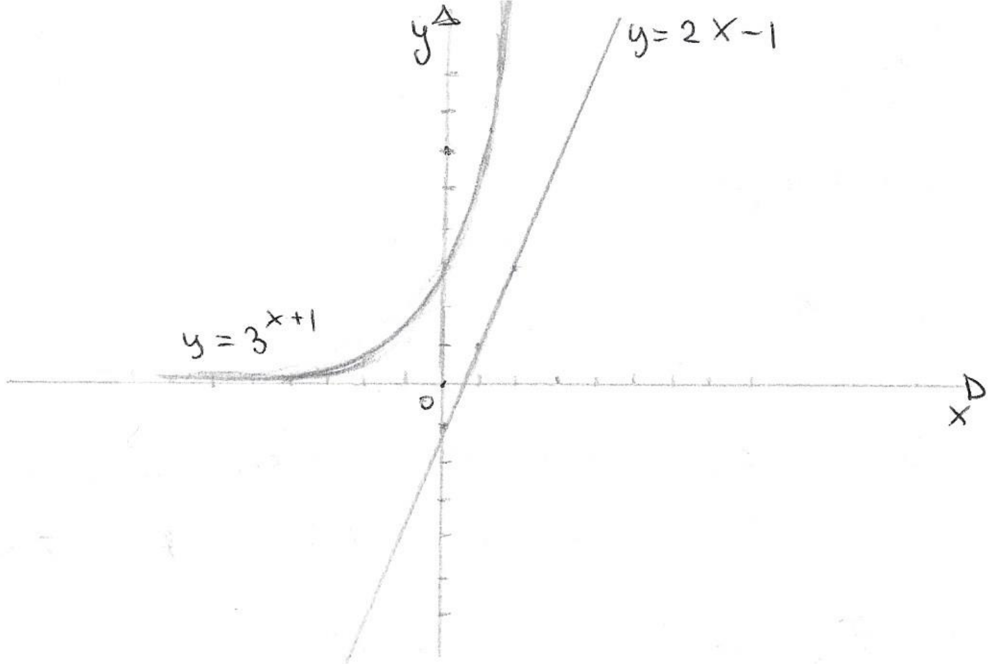
e) $3^{x+1} = 2x - 1$ equazione esponenziale della forma $a^{f(x)} = g(x)$ in cui l'incognita non compare solo all'esponente.

L'unico metodo per avere un'idea della soluzione è il metodo grafico.

Scriviamo l'equazione come un sistema:

$$\begin{cases} y = 3^{x+1} \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

e tracciamo i grafici delle due curve: le ascisse dei punti di intersezione delle due curve costituiscono le soluzioni dell'equazione




Le due curve non hanno punti in comune quindi l'equazione non ha soluzioni.

ESERCIZIO 3 Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le 7$

b) $2^{2+x} > 3^x$

c) $e^{x^2+7x+5} > \frac{1}{e^x}$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le 7$ disequazione esponenziale elementare con $a = \frac{1}{2}$ cioè $0 < a < 1$ e $b = 7 > 0$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x \le \log_{\frac{1}{2}} 7$$

$$x \ge \log_{\frac{1}{2}} 7$$

b) $2^{2+x} > 3^x$ disequazione esponenziale con termine noto esponenziale e con incognita riconducibile alla forma normale

$a^{f(x)} \gtrless b^{g(x)}$ con $a > 0,\ a \ne 1$
$b > 0,\ b \ne 1$

$$3^x < 2^{2+x}$$

$$\log_3 3^x < \log_3 2^{2+x}$$

$$x < \frac{\log_2 2^{2+x}}{\log_2 3}$$

$$x < \frac{2+x}{\log_2 3}$$

$$x \log_2 3 - x < 2$$

$$x\left(\log_2 3 - 1\right) < 2$$

$$x < \frac{2}{\log_2 3 - 1}$$

e) $e^{x^2+7x+5} > \frac{1}{e^x}$

disequazione esponenziale con termine noto esponenziale e con incognita

$e = 2,718 > 1$

$$e^{x^2+7x+5} > e^{-x}$$

$$\ln e^{x^2+7x+5} > \ln e^{-x}$$

$$x^2 + 7x + 5 > -x$$

$$x^2 + 7x + 5 + x > 0$$

$$x^2 + 8x + 5 > 0$$

$$x^2 + 8x + 5 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{44}}{2} = \begin{cases} \frac{-8 - \sqrt{44}}{2} \\ \frac{-8 + \sqrt{44}}{2} \end{cases}$$

$$x < -4 - \frac{\sqrt{44}}{2} \qquad x > -4 + \frac{\sqrt{44}}{2}$$

$$x < -4 - \sqrt{11} \qquad x > -4 + \sqrt{11}$$

ESERCIZIO 4 Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

a) $\log_{\frac{1}{10}} x = -3$

b) $x\log_2 3 + \log_2 5^x = (2x-1)\log_2 5 - x\log_2 5$

a) $\log_{\frac{1}{10}} x = -3$ equazione logaritmica risolvibile con il passaggio all'esponenziale

CE: $x > 0$

$a=\frac{1}{10} > 0$, $a=\frac{1}{10} \neq 1$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\log_{\frac{1}{10}} x} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3}$$

$$x = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3}$$

$$x = \frac{1}{10^{-3}}$$

$x = 10^3$ accettabile

b) $x\log_2 3 + \log_2 5^x = (2x-1)\log_2 5 - x\log_2 5$

equazione logaritmica elementare

$$x\log_2 3 = (2x-1)\log_2 5 - x\log_2 5 - \log_2 5^x$$

$$x\log_2 3 = (2x-1-x)\log_2 5 - x\log_2 5$$

$$x\log_2 3 = (2\cancel{x}-1-\cancel{x}-\cancel{x})\log_2 5$$

$$x\log_2 3 = -\log_2 5 \qquad x = -\frac{\log_2 5}{\log_2 3}$$

ESERCIZIO 5 Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche

a) $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$

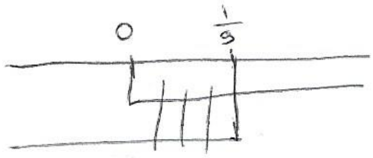
b) $\log_6 (x^2 - x) \leq 1$

c) $4 \log_2^2 x + 3 \log_2 x < 1$

a) $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$ Disequazione logaritmica riconducibile alla forma normale $\log_a f(x) \gtrless c$

Poniamo la disequazione e le condizioni di esistenza a sistema, considerando che $a = \frac{1}{3}$ $0 < \frac{1}{3} < 1$ si ha:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < \left(\frac{1}{3}\right)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{1}{9} \end{cases}$$




$$0 < x < \frac{1}{9}$$

b) $\log_6 (x^2 - x) \leq 1$ Disequazione logaritmica riconducibile alla forma normale $\log_a f(x) \gtrless c$

Poniamo la disequazione e le condizioni di esistenza a sistema, considerando che $a = 6$ $6 > 1$

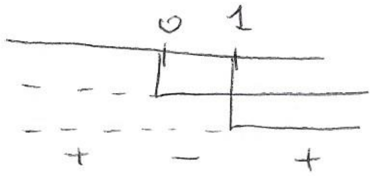
si ha:

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ x^2 - x \leq 6^1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x > 0 \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (1)\ x(x-1) > 0 \\ (2)\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{array}$$

① $x(x-1) > 0$

I $x > 0$

II $x - 1 > 0 \quad x > 1$



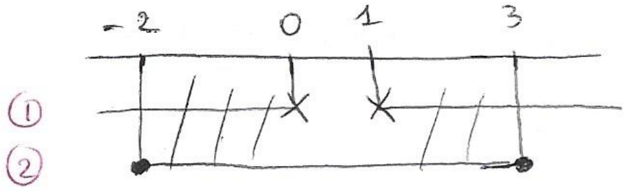

$x < 0 \quad \vee \; x > 1$

② $x^2 - x - 6 \leq 0$

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1-5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{array} \right.$$

$-2 \leq x \leq 3$

Grafico del sistema




$-2 \leq x < 0 \quad \vee \quad 1 < x \leq 3$

$S$: $[-2, 0) \cup (1, 3]$

e) $4 \log_2^2 x + 3 \log_2 x < 1$

$4 \log_2^2 x + 3 \log_2 x - 1 < 0$

Disequazione esponenziale risolubile per sostituzione

Poniamo $\log_2 x = t$

$4t^2 + 3t - 1 < 0$

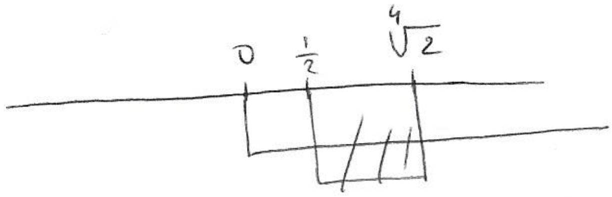
$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{8} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-3-5}{8} = -1 \\ \frac{-3+5}{8} = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$-1 < t < \frac{1}{4}$

$$-1 < \log_2 x < \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2^{-1} < 2^{\log_2 x} < 2^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{2} < x < \sqrt[4]{2} \end{cases}$$



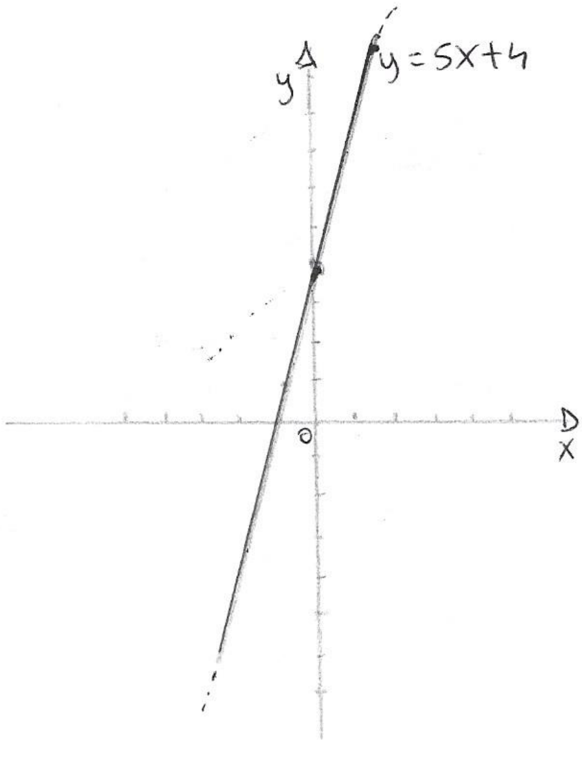

$$\frac{1}{2} < x < \sqrt[4]{2}$$

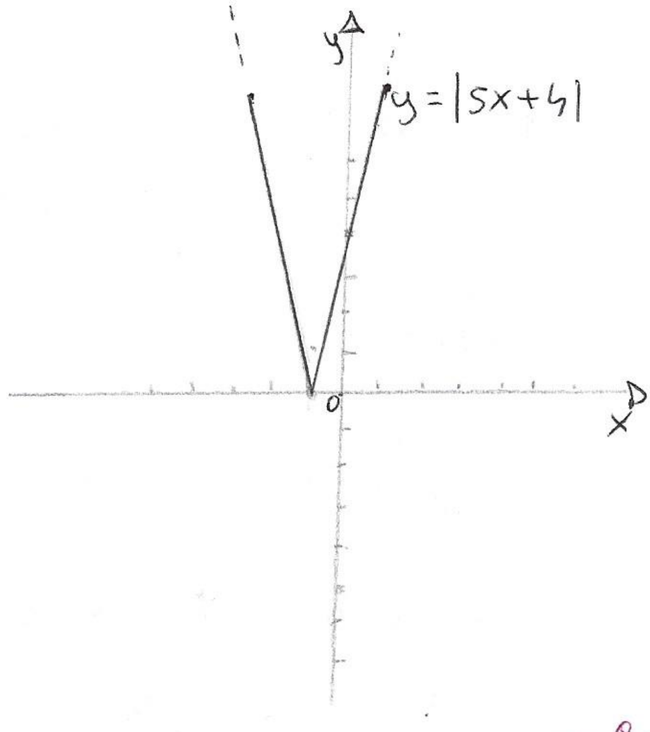
ESERCIZIO 6 Disegnare le seguenti funzioni valore assoluto

a) $f(x) = |5x+4|$

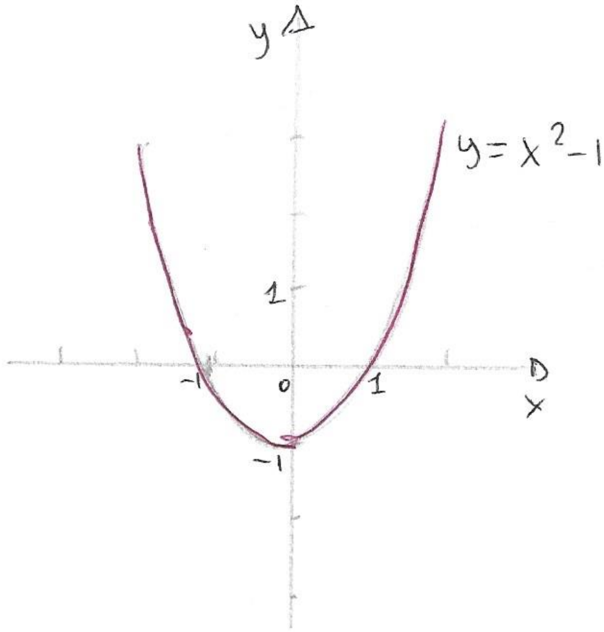
b) $f(x) = |x^2-1|$

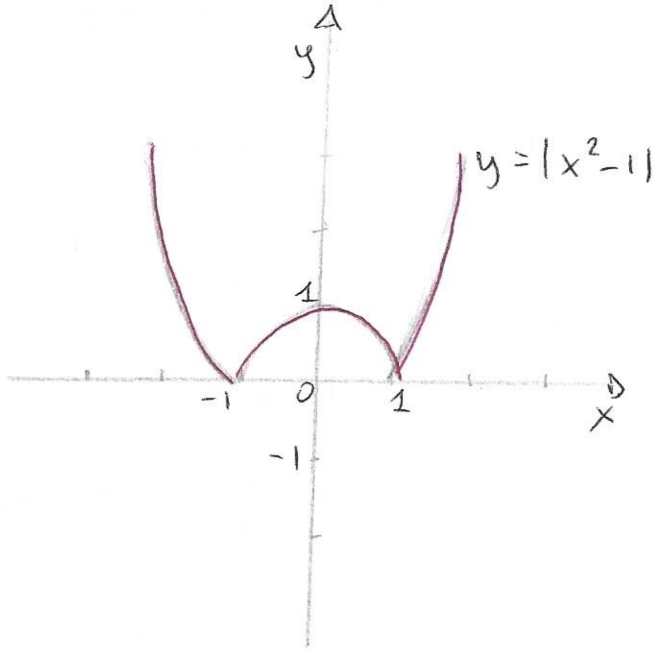
a)



b)




ESERCIZIO 7 Risolvere le seguenti equazioni con valore assoluto:

a) $|x-3| = 2$

b) $|x-1| = 4-2x$

c) $|x^2-5x+6| = |x-3|$

d) $|x^2-4| + |x-2| = |x+1|$

a) $|x-3| = 2$ equazione con valore assoluto e termine noto costante e maggiore di zero

$|f(x)| = k$ con $k>0$ $\Rightarrow$ $f(x) = -k \vee f(x) = k$

$|x-3| = 2$ $2>0$ $\Rightarrow$ $x-3 = -2 \vee x-3 = 2$

$x = -2+3 \vee x = 2+3$

$x = 1 \vee x = 5$

b) $|x-1| = 4 - 2x$ equazione con un modulo e Termine noto variabile

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 = 4-2x \end{cases} \cup \begin{cases} x-1<0 \\ x-1 = -(4-2x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1-4+2x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 1 \\ x-1+4-2x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 3x = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ -x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

NON HA SOLUZIONE

UNICA SOLUZIONE

$x = \frac{5}{3}$

c) $|x^2 - 5x + 6| = |x-3|$ equazione con due valori assoluti

$x^2 - 5x + 6 = x - 3 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 6 = -(x-3)$

$x^2 - 5x + 6 - x + 3 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 6 + x - 3 = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm 0}{2} = \left< \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right. \quad \vee \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \left< \begin{matrix} \frac{4-2}{2} = 1 \\ \frac{4+2}{2} = 3 \end{matrix} \right.$

$x_1 = x_2 = 3 \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = 3$

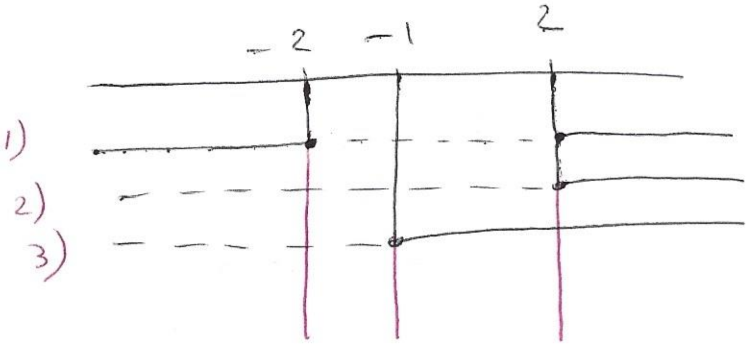
S: $x_1 = 1 \quad x_2 = 3$

d) $|x^2-4| + |x-2| = |x+1|$ Equazione con più valori assoluti

1) $x^2-4 \geq 0 \qquad x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2$

2) $x-2 \geq 0 \qquad x \geq 2$

3) $x+1 \geq 0 \qquad x \geq -1$




① $\begin{cases} x \leq -2 \\ x^2-4-(x-2) = -(x+1) \end{cases}$ $\cup$ ② $\begin{cases} -2 \leq x < -1 \\ -(x^2-4)-(x-2) = -(x+1) \end{cases}$ $\cup$

③ $\begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ -(x^2-4)-(x-2) = x+1 \end{cases}$ $\cup$ ④ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-4+x-2 = x+1 \end{cases}$

① $\begin{cases} x \leq -2 \\ x^2-4-x+2 = -x-1 \end{cases}$ $\cup$ ② $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ -x^2+4-x+2 = -x-1 \end{cases}$ $\cup$

$\cup$ ③ $\begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ -x^2+4-x+2 = x+1 \end{cases}$ $\cup$ ④ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-4+\cancel{x}-2-\cancel{x}-1 = 0 \end{cases}$

1 $\begin{cases} x \leq -2 \\ x^2 - 4 - \cancel{x} + 2 + \cancel{x} + 1 = 0 \end{cases}$ $\cup$ 2 $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ -x^2 + 4 - \cancel{x} + 2 + \cancel{x} + 1 = 0 \end{cases}$ $\cup$

$\cup$ 3 $\begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4 - x + 2 - x - 1 = 0 \end{cases}$ $\cup$ 4 $\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 7 = 0 \end{cases}$

1 $\begin{cases} x \leq -2 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $\cup$ 2 $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ -x^2 + 7 = 0 \end{cases}$ $\cup$ 3 $\begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ -x^2 - 2x + 5 = 0 \end{cases}$ $\cup$

4 $\begin{cases} x \geq 2 \\ x = -\sqrt{7} \quad x = \sqrt{7} \end{cases}$

1 $\begin{cases} x \leq -2 \\ x = 1 \quad x = -1 \end{cases}$ $\cup$ 2 $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ x^2 - 7 = 0 \end{cases}$ $\cup$ 3 $\begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ x^2 + 2x - 5 = 0 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x \geq 2 \\ x = -\sqrt{7} \quad x = \sqrt{7} \end{cases}$

1 Nessuna soluzione $\cup$ 2 $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ x = -\sqrt{7} \quad x = \sqrt{7} \end{cases}$ $\cup$ 3 $\begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ x = -1 + \sqrt{6} \quad x = -1 - \sqrt{6} \end{cases}$

4 $x = \sqrt{7}$

① $\phi$ ∪ ② Nessuna soluzione, ③ $\cancel{x} = -1+\sqrt{6}$ ∪ ④ $x=\sqrt{7}$

$$\phi \cup \phi \cup x=-1+\sqrt{6} \cup x=\sqrt{7}$$

$$S: \quad x_1=\sqrt{6}-1 \qquad x_2=\sqrt{7}$$

ESERCIZIO 8 Risolvere le seguenti disequazioni con valore assoluto

a) $|4x-5|+4<5$

b) $|1-x|<2x-3$

c) $2x+x|x+1|>3|x+2|$

a) $|4x-5|+4<5$

$|4x-5|<5-4$

$|4x-5|<1$

Disequazione con valore assoluto e termine noto costante ($K=1>0$) del tipo $|f(x)|<K$

la disequazione equivale a

$$-1<4x-5<1$$

$$4<4x<6$$

$$1<x<\frac{3}{2} \qquad S: \left(1,\frac{3}{2}\right)$$

b) $|1-x| < 2x-3$ Disequazione con valore assoluto e termine noto variabile

$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1-x < 2x-3 \end{cases} \cup \begin{cases} 1-x < 0 \\ -(1-x) < 2x-3 \end{cases}$

$\begin{cases} -x \geq -1 \\ 1-x-2x+3 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -x < -1 \\ -1+x-2x+3 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 1 \\ -3x < -4 \end{cases} \cup \begin{cases} +x > 1 \\ -x < -2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 1 \\ 3x > 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 1 \\ x > \frac{4}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \end{cases}$

Nessuna soluzione $\cup$ $x > 2$

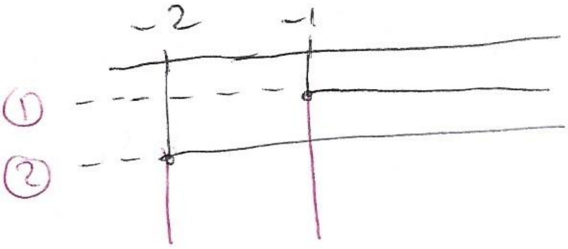
$\phi \cup x > 2$

$S: (+2, +\infty)$

c) $2x + x|x+1| > 3|x+2|$ Disequazione con più valori assoluti

(1) $x+1 \geq 0$ $x \geq -1$

(2) $x+2 \geq 0$ $x \geq -2$




$$① \begin{cases} x \leq -2 \\ 2x + x(-x-1) > 3(-x-2) \end{cases} \cup \; ② \begin{cases} -2 < x < -1 \\ 2x + x(-x-1) > 3(x+2) \end{cases} \cup$$

$$③ \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x + x(x+1) > 3(x+2) \end{cases}$$

$$① \begin{cases} x \leq -2 \\ 2x - x^2 - x > -3x - 6 \end{cases} \cup \; ② \begin{cases} -2 < x < -1 \\ 2x - x^2 - x > 3x + 6 \end{cases} \cup$$

$$\cup \; ③ \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x + x^2 + x > 3x + 6 \end{cases}$$

$$① \begin{cases} x \leq -2 \\ -x^2 + 4x + 6 > 0 \end{cases} \cup \; ② \begin{cases} -2 < x < -1 \\ -x^2 - 2x - 6 > 0 \end{cases} \cup \; ③ \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 6 > 0 \end{cases}$$

$$① \begin{cases} x \leq -2 \\ x^2 - 4x - 6 < 0 \end{cases} \cup \; ② \begin{cases} -2 < x < -1 \\ x^2 + 2x + 6 < 0 \end{cases} \cup \; ③ \begin{cases} x \geq -1 \\ x < -\sqrt{6} \quad x > \sqrt{6} \end{cases}$$

① $\begin{cases} x \leq -2 \\ 2-\sqrt{10} < x < 2+\sqrt{10} \end{cases}$ $\cup$ ② $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ \text{Nessuna soluzione} \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < -\sqrt{6} \quad x > \sqrt{6} \end{cases}$

$$\emptyset \quad \cup \quad \emptyset \quad \cup \quad x > \sqrt{6}$$

$$x > \sqrt{6}$$

$$S: (\sqrt{6}, +\infty)$$