Matematica

7. Insiemi, successioni e calcolo combinatorio

Giuseppe Vittucci Marzetti[1]

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2019-20

[1]Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche

- Consideriamo la funzione

$$f : A \mapsto B$$

che fa corrispondere a ogni elemento $a \in A$ uno e un solo elemento $b \in B$.

- Tale funzione è detta:
  - **iniettiva**, se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B:
  $$\forall\ a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \ \Rightarrow\ f(a_1) \neq f(a_2)$$
  - **suriettiva**, se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A:
  $$\forall\, b \in B \ \ \exists\, a \in A :\ f(a) = b$$
  - **biunivoca** (o **biiettiva**), se è iniettiva e suriettiva, cosicché ogni elemento di B è immagine di uno e un solo elemento di A.
  $$\forall\, b \in B \ \ \exists!\, a \in A : f(a) = b$$

Cardinalità degli insiemi e insiemi equipotenti

- Dati due insiemi A e B:
  - A ha **cardinalità minore o uguale a** B, $|A| \leq |B|$, se esiste una funzione iniettiva $f : A \mapsto B$.
  - A ha **cardinalità minore di** B, $|A| < |B|$, se esiste una funzione iniettiva $f : A \mapsto B$ ma non suriettiva.
  - A e B hanno la **stessa cardinalità**, $|A| = |B|$, se esiste una funzione biunivoca $f : A \mapsto B$.
- Due insiemi sono detti **equipotenti** se hanno la stessa cardinalità.

Insiemi finiti e infiniti

- Un insieme A si dice
  - **finito** con $|A| = n$ se esistono $n \in \mathbb{N}$ e una funzione biunivoca $f : \{1, 2, 3, \dots, n\} \mapsto A$.
  - **infinito** (contiene infiniti elementi) se non è un insieme finito: $|A| = \infty$.
- Un insieme è infinito se è equipotente a un suo sottoinsieme proprio.

Paradosso del Grand Hotel di Hilbert

- Il paradosso del Grand Hotel di Hilbert
  - Immagina un hotel con infinite stanze, tutte occupate.
  - Se arrivano infiniti nuovi ospiti, è possibile sistemarli tutti.
  - L'albergatore può far spostare ogni ospite nella stanza con numero doppio rispetto a quello attuale (dalla 1 alla 2, dalla 2 alla 4, ecc.), lasciando ai nuovi ospiti tutte le (infinite) camere dispari.
- L'insieme dei numeri naturali è infinito.
  - L'insieme dei **numeri interi positivi pari** $P = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ è un sottoinsieme proprio dei numeri naturali: $P \subset \mathbb{N}$.
  - Tale insieme può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{N}^+ = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & \ldots\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ P = \{ & 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & 14, & 16, & \ldots\} \end{array}$$

Insiemi numerabili

- Un insieme A si dice **numerabile** se esiste una funzione biunivoca $f : \mathbb{N} \mapsto A$.
- Diremo in questo caso che:

$$|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

  dove il cardinale $\aleph_0$ (Alef zero, la prima lettera dell'alfabeto ebraico) rappresenta il più piccolo cardinale infinito.
- Gli elementi di un insieme numerabile A possono essere enumerati, ovvero scritti come **successione** di elementi indicizzati da $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

Insiemi numerabili

- L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ è numerabile.
- L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è numerabile.
- Se A è numerabile, $A \times A$ è numerabile.

- **Teorema fondamentale sul numerabile** (o **primo teorema di Cantor**): L'unione numerabile di insiemi numerabili $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ è numerabile.

Cardinalità dell'insieme delle parti

- Dato un insieme A, l'**insieme delle parti** (o **insieme potenza**) di A, $P(A)$, è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.
- Esempio:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- Se A è un insieme finito di n elementi, $|A| = n$, l'insieme delle parti di A contiene 2^n elementi (sottoinsiemi di A):

$$|P(A)| = 2^n$$

- (**Secondo**) **Teorema di Cantor**: l'insieme delle parti di A, $P(A)$, ha cardinalità maggiore della cardinalità di A.
- L'insieme delle parti di $\mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$, ha cardinalità maggiore di $\aleph_0$ ed è quindi non numerabile.
- Tale cardinalità è chiamata **cardinalità del continuo** ed è indicata con $\aleph_1$ ($> \aleph_0$).

Insiemi non numerabili

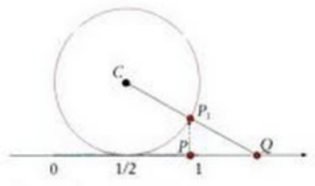
- L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ è un insieme non numerabile.
- Dimostrazione per assurdo (**argomento diagonale di Cantor**):
  - Supponiamo che l'insieme sia numerabile. Questo significa che i suoi elementi possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali dando luogo a una successione di numeri $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ che esaurisce i numeri reali compresi tra 0 e 1.
  - Per ognuno di questi possiamo scrivere la rappresentazione decimale:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 + \tfrac{n_{11}}{10} + \ldots + \tfrac{n_{1k}}{10^k} + \ldots \\
x_2 &= 0 + \tfrac{n_{21}}{10} + \ldots + \tfrac{n_{2k}}{10^k} + \ldots \\
&\ldots \\
x_k &= 0 + \tfrac{n_{k1}}{10} + \ldots + \tfrac{n_{kk}}{10^k} + \ldots \\
&\ldots
\end{aligned}$$

  - Il numero $x = 0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} + \ldots$ con $n_n \neq n_{nn}$, appartiene all'intervallo (0,1) ma è diverso da qualsiasi elemento di quelli elencati al punto sopra, e questo contraddice l'assunto.

Insieme dei numeri reali come insieme più che numerabile

- Tra l'intervallo (0,1) e $\mathbb{R}$ esiste una corrispondenza biunivoca: l'insieme $\mathbb{R}$ è equipotente a un suo sottoinsieme proprio.
- Per mostrarlo è possibile:
  - proiettare un generico punto $P \in (0,1)$ sulla circonferenza unitaria, ottenendo il punto P_1;
  - prolungare il raggio CP_1 fino a intersecare l'asse dei numeri reali, ottenendo il punto $Q \in \mathbb{R}$.
- L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile e ha la cardinalità del continuo ($\aleph_1 > \aleph_0$): è più che numerabile.



Fonte: Guerraggio, 2014.

Esiste una cardinalità "intermedia" fra $\aleph_0$ e $\aleph_1$?

- Questa proposizione è indecidibile.
- Cantor risolse il problema introducendo un apposito assioma.
- Secondo l'**ipotesi del continuo** (indimostrabile), non esiste una cardinalità intermedia fra $\aleph_0$ e $\aleph_1$.

Fenomeni discreti e successioni

- Molti fenomeni (**fenomeni discreti**) sono descrivibili e modellizzabili mediante funzioni definite su $\mathbb{N}$.
- In tali funzioni (o **successioni**), la variabile indipendente assume solo valori interi.

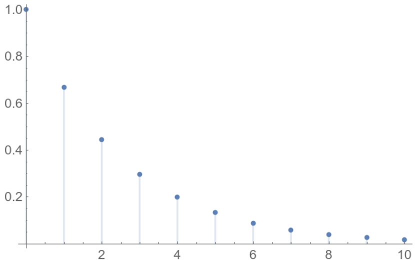


Figura: $f(k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ con $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$

Successioni come funzioni definite su $\mathbb{N}$

- Chiamiamo **successione** ogni funzione definita in $\mathbb{N}$.

$$f : A \subseteq \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$$

- Esempi:
  - La successione che associa ad ogni numero naturale il suo inverso:

$$f(k) = \frac{1}{k} \qquad k \in \mathbb{N}^+$$

  - La funzione

$$f(k) = a + d(k-1) \qquad k \in \mathbb{N}^+ \qquad a, d \in \mathbb{R}$$

    è una **progressione aritmetica**, una successione di numeri tali che la differenza tra ciascun termine (o elemento) della successione e il suo precedente è costante e chiamata **ragione della progressione**.
  - La funzione

$$f(k) = a\, d^k \qquad k \in \mathbb{N}^+ \qquad a, d \in \mathbb{R}$$

    è una **progressione geometrica**, una successione di numeri tali che il rapporto tra ciascun termine della successione e il suo precedente è costante (**ragione della progressione**).

Successioni come insiemi infiniti e numerabili

- Una successione può definirsi anche come un insieme ordinato di immagini dei numeri naturali:

$$S = \{s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$$

- Una successione è dunque un insieme infinito numerabile.
- Le successioni a volte sono definite **per ricorrenza**:
  - Si assegna un valore al termine iniziale della successione (s_0).
  - Ogni altro termine è definito in funzione del precedente (o dei precedenti):

$$s_n = f(s_{n-1})$$

Successione di Fibonacci

- La **successione di Fibonacci** (o **successione aurea**) indica una successione di numeri interi positivi in cui:
  - i primi due sono pari a 1;
  - ciascun numero a cominciare dal terzo è la somma dei due precedenti.
- Tale successione ha la seguente definizione ricorsiva:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= 1 \\
F_2 &= 1 \\
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n
\end{aligned}
$$

- Gli elementi F_n sono detti **numeri di Fibonacci**.

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$$

La soluzione al problema dei conigli nella successione di Fibonacci

- Assumiamo coppie di conigli che diventano fertili a partire dal secondo mese di vita e non muoiono mai.
- Ogni coppia genera ogni mese un'altra coppia di conigli.
- Quante coppie avremo dopo n mesi se partiamo con una coppia di conigli?
- In generale, le coppie presenti al mese n saranno quelle presenti al mese precedente più quelle generate dai conigli presenti due mesi prima:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Sezione aurea e successione di Fibonacci

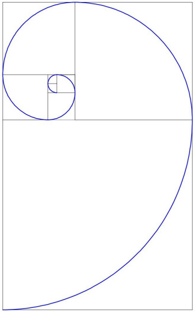
- La **sezione aurea** (o **rapporto aureo**) denota il numero irrazionale $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ottenuto effettuando il rapporto fra due lunghezze disuguali delle quali la maggiore a è medio proporzionale tra la minore b e la somma delle due.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

- Posto $a = b\varphi$, sostituendo si arriva all'equazione $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, che ha una sola soluzione positiva:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,033$$

- Il rapporto fra due numeri consecutivi della successione di Fibonacci approssima man mano sempre più precisamente il rapporto aureo.



La spirale di Fibonacci, creata mediante l'unione di quadrati con i lati equivalenti ai numeri della successione

Fonte: CC BY-SA 3.0, wikipedia.org.

Equilibrio di mercato e modello della ragnatela

- In economia l'equilibrio di mercato concorrenziale per un determinato prodotto è individuato dall'intersezione tra:
  - la **curva di domanda**, che individua la quantità complessivamente domandata (D) in corrispondenza di ciascun prezzo (p)
  - la **curva di offerta**, che individua la quantità complessivamente prodotta e offerta (S) in corrispondenza di ciascun prezzo (p).

$$\begin{cases} D = & a - b\,p \\ S = & -c + d\,p \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{p} & = \frac{a+c}{b+d} \\ \bar{S} = \bar{D} & = \frac{a\,d - b\,c}{b+d} \end{cases}$$

  dove a, b, c, d sono parametri positivi.
- È possibile dinamizzare il modello facendo assunzioni sui tempi con cui domanda e offerta si adeguano alle variazioni di prezzo.
- Nel **modello della ragnatela** (Kaldor, 1934) si assume che:
  - la domanda si modifica senza ritardi;
  - la produzione necessita di tempo e i venditori modificano la produzione in ogni periodo t sulla base del prezzo osservato nel periodo precedente $(t-1)$.

Modello della ragnatela

- Dalle assunzioni precedenti segue che:

$$\begin{cases} D_t = & a - b\, p_t \\ S_t = & -c + d\, p_{t-1} \end{cases}$$

- La condizione di equilibrio di mercato richiede che la quantità offerta sia uguale a quella domandata per cui:

$$D_t = S_t \qquad \Rightarrow \qquad a - b\, p_t = -c + d\, p_{t-1}$$

da cui si ricava:

$$p_t = \frac{a+c}{b} - \frac{d}{b}\, p_{t-1}$$

- Questa è una successione definita per ricorrenza.
- **Nota avanzata**: è possibile mostrare che la formula esplicita per il termine p_t della successione è dato da:

$$p_t = \bar{p} + \left(-\frac{d}{b}\right)^t (p_0 - \bar{p})$$

dove p_0 è il prezzo iniziale e $\bar{p}$ è il prezzo di equilibrio statico.

Calcolo combinatorio

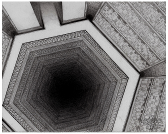
Calcolo combinatorio

Branca della matematica che studia i modi per raggruppare o ordinare secondo date regole gli elementi di insiemi finiti.

- Dato un insieme A di n elementi si vogliono contare le configurazioni che possono assumere k elementi tratti da questo insieme.
- Vanno distinti i casi in cui:
  - l'ordinamento degli elementi nelle diverse configurazioni è importante (**disposizioni** e **permutazioni**) rispetto al caso in cui non lo è (**combinazioni**).
  - uno stesso elemento può comparire più di una volta all'interno di una stessa configurazione (**disposizioni con ripetizione**, **permutazioni con ripetizione** e **combinazioni con ripetizione**) rispetto al caso in cui questo non può avvenire (**disposizioni semplici**, **permutazioni semplici** e **combinazioni semplici**).

La biblioteca di Babele di J. L. Borges

L'universo (che altri chiama la Biblioteca) si compone d'un numero indefinito, e forse infinito, di gallerie esagonali, con vasti pozzi di ventilazione nel mezzo, bordati di basse ringhiere. Da qualsiasi esagono si vedono i piani superiori e inferiori, interminabilmente. La distribuzione degli oggetti nelle gallerie è invariabile. 25 vasti scaffali, in ragione di 5 per lato, coprono tutti i lati meno uno; la loro altezza, che è quella stessa di ciascun piano, non supera di molto quella d'una biblioteca normale. Il lato libero dà su un angusto corridoio che porta a un'altra galleria, identica alla prima e a tutte. ... Di qui passa la scala spirale, che si inabissa e s'innalza nel remoto.
A ciascuna parete di ciascun esagono corrispondono 5 scaffali; ciascuno scaffale contiene 32 libri di formato uniforme; ciascun libro è di 410 pagine; ciascuna pagina, di 40 righe; ciascuna riga, di 40 lettere di colore nero...
Un bibliotecario di genio scoprì la legge fondamentale della Biblioteca. Il numero dei simboli ortografici è di 25.... Non vi sono, nella vasta Biblioteca, due soli libri identici. Da queste premesse incontrovertibili dedusse che la Biblioteca è totale, e che i suoi scaffali registrano tutte le possibili combinazioni dei 25 simboli ortografici (numero, anche se vastissimo, non infinito) cioè tutto ciò ch'è dato di esprimere, in tutte le lingue.



Disposizioni semplici

- Chiamiamo **disposizioni semplici** di n oggetti di classe k le configurazioni che si possono formare considerando k oggetti diversi tra gli n dati, considerando distinte due configurazioni che differiscono per almeno un oggetto o per l'ordine con cui gli oggetti compaiono.
- Il numero $D_{n,k}$ delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k è dato dal seguente prodotto di k numeri interi positivi.

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- $n!$ è il **fattoriale** di n (per convenzione $0! = 1$), un modo compatto per indicare il prodotto dei numeri naturali da 1 a n:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- Esempio:
  - Ai Mondiali 2018 si erano qualificate 32 squadre. Quanti erano i possibili ordini di arrivo nelle prime tre posizioni?
  - Il risultato è dato dal numero di disposizioni semplici di 32 elementi di classe 3: $32!/(32-3)! = 29\,760$.

Permutazioni semplici

- Chiamiamo **permutazioni semplici** di n oggetti gli allineamenti che si possono formare considerando ogni volta tutti gli oggetti dati senza ripetizione.
- Dalla definizione segue che:

$$P_n = D_{n,n} = n!$$

- Esempio:
  - Quanti sono gli ordini possibili di disporre 10 libri su uno stesso scaffale?
  - Il risultato è dato dal numero di permutazioni semplici di 10 oggetti: $10! = 3\,628\,800$.

Combinazioni semplici e coefficiente binomiale

- Chiamiamo **combinazioni semplici** di n oggetti di classe k le configurazioni che si possono formare considerando k oggetti distinti tra gli n dati considerando distinte due configurazioni se differiscono per almeno un oggetto e non per l'ordine.
- Il numero $C_{n,k}$ delle combinazioni semplici di n oggetti di classe k è:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

  dove $\binom{n}{k}$ indica il **coefficiente binomiale** (letto: n su k).
- Esempio:
  - Qual è il numero delle possibili sestuple (6 numeri distinti) in un'estrazione al Superenalotto (90 numeri)?
  - Il risultato è dato dal numero di combinazioni semplici di 90 elementi di classe 6:

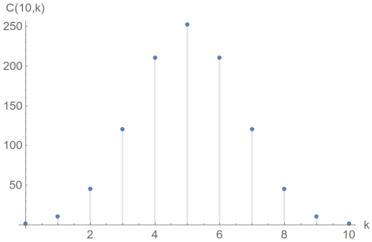
$$C_{90,6} = \binom{90}{6} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 622\,614\,630$$

Coefficiente binomiale

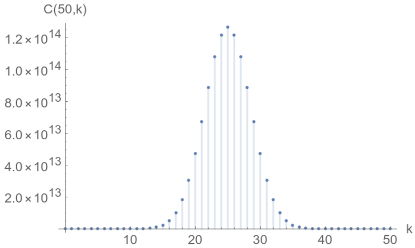
- Per il coefficiente binomiale si ha:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

- Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ ci dà il numero di possibili serie di n tentativi in cui si ottengono k successi (e quindi $n - k$ fallimenti).



(a) $\binom{10}{k}$



(b) $\binom{50}{k}$

Figura: Valore del coefficiente binomiale

Disposizioni con ripetizione

- Chiamiamo **disposizioni con ripetizione** di n oggetti di classe k le configurazioni che si possono formare considerando k oggetti diversi tra gli n dati, considerando distinte due configurazioni che differiscono o per gli oggetti contenuti o per l'ordine con cui gli oggetti compaiono o per il numero di ripetizioni di ogni oggetto.
- Il numero $D'_{n,k}$ delle disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe k è dato da:
$$D'_{n,k} = n^k$$
- Esempio:
  - Quante erano le possibili schedine diverse (senza doppie e triple) giocabili al Totocalcio ogni domenica quando le partite da pronosticare erano 13 (prima della stagione 2003-04)?
  - Essendo tre gli oggetti a disposizione (1,X,2), il risultato è il numero di disposizioni con ripetizione di 3 oggetti di classe 13:
$$D'_{3,13} = 3^{13} = 1\,594\,323$$

Permutazioni con ripetizione

- Dato un insieme con n elementi di cui n_1 uguali tra loro, n_2 uguali tra loro e diversi dai precedenti, ..., n_k uguali tra loro e diversi dai precedenti, le **permutazioni con ripetizione** di questi n oggetti sono gli allineamenti che si possono formare considerando ogni volta tutti gli oggetti dati.
- Dalla definizione segue che:

$$P'_{n_1,n_2,\ldots,n_h} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_h!}$$

- Esempio:
  - Qual è il numero di anagrammi possibili della parola "Matematica"?
  - Essendo la parola composta da 10 lettere, di cui: 2 M, 3 A, 2 T, 1 E, 1 I, 1 C, il numero degli anagrammi possibili è:

$$P'_{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!\,2!\,2!} = 151\,200$$

Combinazioni con ripetizione

- Chiamiamo **combinazioni con ripetizione** di n oggetti di classe k le configurazioni che si possono formare considerando k oggetti tra gli n dati, considerando distinte due configurazioni che differiscono per gli oggetti contenuti o per il numero di ripetizioni di ogni oggetto, ma non per l'ordine degli oggetti.
- Il numero $C'_{n,k}$ delle combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k è:

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

- Esempio:
  - Data un'urna di 10 palline numerate, quante possibili estrazioni diverse di 3 palline (non considerando l'ordine con cui vengono estratte) si possono ottenere supponendo che, dopo ogni estrazione, la pallina estratta venga reinserita nell'urna?
  - Il risultato è dato dal numero di combinazioni con ripetizione di 10 elementi di classe 3:

$$C'_{10,3} = \binom{10+3-1}{3} = 220$$

Calcolare il numero di combinazioni di numeri interi non negativi che sommano alla stessa costante

- Il numero di soluzioni in interi non negativi dell'equazione:

$$\sum_{i=1}^{I} n_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_I = M \qquad M, n_1, \ldots n_I \in \mathbb{N}$$

  è dato dal numero di combinazioni con ripetizione di I elementi di classe M:

$$C'_{I,M} = \binom{I+M-1}{M}$$

- Per capire il motivo occorre osservare che a ogni soluzione è possibile associare una combinazione con ripetizione di I oggetti distinti di classe M.
- Per esempio, data l'equazione $n_1 + n_2 + n_3 = 7$, la soluzione (1,2,4) può essere vista come la particolare combinazione con ripetizione di 3 elementi di classe 7:

$$\{\underbrace{a_1}_{1}, \underbrace{a_2, a_2}_{1+1=2}, \underbrace{a_3, a_3, a_3, a_3}_{1+1+1+1=4}\}$$

Combinazioni con ripetizione come problema di suddivisione

- Le combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k possono essere pensate anche come i modi in cui è possibile suddividere un insieme di k oggetti identici in n urne, ammettendo la possibilità che una o più urne rimangano vuote.
- Disponiamo in fila $n-1$ elementi u indistinguibili fra loro:

u_1	u_2	$\dots$	u_{n-1}

- Consideriamo i k oggetti (o) e inseriamoli fra gli elementi u, ottenendo così una fila di $n+k-1$ elementi. Esempio:

o_1	o_2	u_1	o_3	u_2	u_3	o_4	$\dots$	u_{n-1}	o_{k-1}	o_k

- Stabiliamo di inserire nella prima urna gli oggetti alla sinistra di u_1 (se ce ne sono), nella seconda urna gli oggetti alla destra di u_1 e alla sinistra di u_2 (se ce ne sono), e così via.

Combinazioni con ripetizione come problema di suddivisione

- Si tratta quindi di scegliere k posti fra gli $n+k-1$ disponibili in cui inserire gli elementi o (o, in modo equivalente, di scegliere $n-1$ posti fra gli $n+k-1$ disponibili in cui inserire gli elementi u).
- Il problema di stabilire il numero delle configurazioni possibili risulta equivalente a quello di stabilire il numero di combinazioni semplici di $n+k-1$ oggetti di classe k:

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Il principio del prodotto

- In base al **principio del prodotto**, se un primo obiettivo T_1 può essere raggiunto in n_1 modi diversi e un secondo obiettivo T_2 in n_2 modi, allora le possibilità di raggiungere (in successione) l'obiettivo T_1, T_2 sono $n_1 \cdot n_2$.
- Esempio:
  - In quanti modi è possibile allineare 5 elementi $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ sapendo che gli ultimi tre – a_3, a_4 e a_5 – non possono occupare la prima e l'ultima posizione?
  - Soluzione:
    - La prima e l'ultima posizione devono essere occupate da a_1 e a_2, dando luogo a due possibili configurazioni (P_2)
    - Le restanti tre posizioni danno luogo a 6 permutazioni semplici (P_3).
    - Il totale degli allineamenti ammessi è pertanto pari a 12 ($P_2 \cdot P_3$).

Definizione classica di probabilità

- In base alla **definizione classica di probabilità**, la **probabilità di un evento** è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.
- Questa definizione, utile operativamente in molti casi, presenta forti limiti concettuali e pratici ed è stata pertanto abbandonata:
  - dal punto di vista formale, è una definizione circolare:
    è valida sotto l'ipotesi di eventi equiprobabili, presumendo pertanto ciò che mira a definire;
  - non definisce la probabilità in caso di eventi non equiprobabili;
  - presuppone un numero finito di risultati possibili e di conseguenza non è utilizzabile nel continuo.

Semplici esempi di calcolo di probabilità

- Probabilità di fare 6 al Superenalotto giocando una sestupla:
  - Numero dei casi favorevoli: 1
  - Numero dei casi possibili: $C_{90,6} = \binom{90}{6} = 622.614.630$

$$\text{Prob} = \frac{1}{622.614.630} \approx 1,6 \times 10^{-9}$$

- Probabilità di estrazione di un terno su una ruota:
  - Numero dei casi favorevoli: $C_{87,2} = \binom{90-3}{5-3} = \binom{87}{2} = 3\,741$
  - Numero dei casi possibili: $C_{90,5} = \binom{90}{5} = 43\,949\,268$

$$\text{Prob} = \frac{3\,741}{43\,949\,268} = \frac{1}{11\,748} = 0,0000851209$$