Matematica
Esempio esame Unità 10-11

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

Dicembre 2018

1. *Esercizio.* Calcolare la *derivata* delle seguenti funzioni.

   (a) (1 punto) $f(x) = 4 + 2x$

   Soluzione $f'(x) = 2$

   (b) (2 punti) $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x}$

   Soluzione $f'(x) = 6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

   (c) (2 punti) $f(x) = \frac{1-x}{x+3}$

   Soluzione Applicando la regola della derivata di un rapporto si ottiene:

$$f'(x) = \frac{-(x+3)-(1-x)}{(x+3)^2} = -\frac{4}{(x+3)^2}$$

   (d) (2 punti) $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}$

   Soluzione Applicando la regola della derivata di un rapporto si ottiene:

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x+1} - \frac{x^2+1}{2\sqrt{x+1}}}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2} = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x^2+1}{2\sqrt{(x+1)^3}}$$

   (e) (2 punti) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3+x^2-1}$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Soluzione Applicando la regola della derivata di una funzione composta si ottiene:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^3+x^2-1}(3x^2 + 2x)$$

(f) (2 punti) $f(x) = \log_2 x - 2^{x-1}$

Soluzione

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} - 2^{x-1} \ln 2$$

(g) (2 punti) $f(x) = \ln x^x$

Soluzione Può notarsi che $f(x) = x \ln x$, da cui, derivando per x e applicando la regola della derivata di un prodotto si ottiene:

$$f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} = 1 + \ln x$$

(h) (2 punti) $f(x) = x^x$

Soluzione Può notarsi che:

$$\frac{\mathrm{d} \ln f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{x^x}$$

per la regola della derivata di una funzione composta, e che

$$\frac{\mathrm{d} \ln f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d} \ln x^x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x} = 1 + \ln x$$

per cui:

$$f'(x) = x^x(1 + \ln x)$$

In alternativa può riesprimersi la funzione come segue:

$$f(x) = x^x = \mathrm{e}^{\ln x^x} = \mathrm{e}^{x \ln x}$$

e derivare rispetto ad x ottenendo:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\ln x^x}(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

2. *Esercizio.* Calcolare le *derivate prima* e *seconda* delle seguenti funzioni.

(a) (2 punti) $f(x) = a + b\,x$, dove a e b sono due parametri dati ($a, b \in \mathcal{R}$).

Soluzione

$$f'(x) = b \qquad\qquad f''(x) = 0$$

(b) (2 punti) $f(x) = ax^3 + b\,x^2 + c$, dove a e b sono due parametri dati ($a, b \in \mathcal{R}$).

Soluzione

$$f'(x) = 3ax^2 + 2b\,x \qquad\qquad f''(x) = 6ax + 2b$$

(c) (2 punti) $f(x) = \frac{a}{x+b}$, dove a e b sono due parametri dati ($a, b \in \mathcal{R}$).

Soluzione

$$f'(x) = -\frac{a}{(x+b)^2} \qquad\qquad f''(x) = \frac{2a}{(x+b)^3}$$

(d) (2 punti) $f(x) = \mathrm{e}^{-a\cdot x}$, dove a è un parametro dato ($a \in \mathcal{R}$).

Soluzione

$$f'(x) = -a \cdot \mathrm{e}^{-a\cdot x} \qquad\qquad f''(x) = a^2 \mathrm{e}^{-a\cdot x}$$

(e) (2 punti) $f(x) = \frac{\log_2(x+1)}{x}$

Soluzione

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{x}{(x+1)\ln 2} - \frac{\ln(x+1)}{\ln 2}}{x^2} = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right) \\
f''(x) &= \frac{1}{\ln 2}\left(-\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} - \frac{\frac{x^2}{x+1} - 2x\ln(x+1)}{x^4}\right) = \\
&= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2\ln(x+1)}{x^3} - \frac{3x+2}{x^2(x+1)^2}\right) \\
&= \frac{2(x+1)^2\ln(x+1) - x(3x+2)}{x^3(x+1)^2\ln 2}
\end{aligned}$$

3. *Esercizio.* Calcola i seguenti limiti utilizzando dove possibile il *teorema di De l'Hôpital*:

(a) (3 punti) $\lim_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^{x+1}$

Soluzione Per sostituzione si arriva alla forma di indecisione $0 \cdot \infty$, che può essere ricondotta alla forma ∞/∞, su cui si può applicare il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 \mathrm{e}^{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{-(x+1)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-\mathrm{e}^{-(x+1)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^{-(x+1)}} = 0$$

(b) (2 punti) $\lim_{x \to 2} (3-x)^{\frac{1}{2-x}}$

Soluzione Per sostituzione si arriva alla forma di indecisione 1^∞, che può essere ricondotta alla forma $0/0$, su cui si può applicare il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x \to 2} (3-x)^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{x \to 2} \mathrm{e}^{\frac{1}{2-x} \ln(3-x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x \to 2} \frac{\ln(3-x)}{2-x}} = \mathrm{e}^{\lim_{x \to 2} \frac{1}{3-x}} = \mathrm{e}$$

(c) (2 punti) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x + \ln x^2}$

Soluzione Per sostituzione si arriva alla forma di indecisione ∞/∞, per cui si può applicare il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x + \ln x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{x}} = 1$$

4. *Esercizio.* Scrivere lo *sviluppo di Taylor* all'ordine N con centro x_0 delle seguenti funzioni.

(a) (2 punti) $f(x) = \sqrt{1+2x}$, $N = 2$, $x_0 = 1$.

Soluzione Calcoliamo la derivata prima e seconda:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{2\sqrt{1+2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \\ f''(x) &= -\frac{2}{2(1+2x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Applichiamo la formula di Taylor con punto iniziale $x_0 = 1$ arrestata all'ordine 2 con resto nella forma di Peano:

$$f(x) = \sqrt{3} + \frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{(x-1)^2}{6\sqrt{3}} + \mathcal{O}\big((x-1)^2\big)$$

(b) (2 punti) $f(x) = \ln(1+2x^2)$, $N = 3$, $x_0 = 0$.

Soluzione Calcoliamo la derivata prima, seconda e terza:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{4x}{1+2x^2} \\
f''(x) &= \frac{4(1+2x^2)-16x^2}{(1+2x^2)^2} = \frac{4-8x^2}{(1+2x^2)^2} \\
f'''(x) &= \frac{-16x(1+2x^2)^2 - 8x(4-8x^2)(1+2x^2)}{(1+2x^2)^4} \\
&= \frac{-16x-32x^3-32x+64x^3}{(1+2x^2)^3} = \frac{-48x+32x^3}{(1+2x^2)^3} \\
&= \frac{16x(2x^2-3)}{(1+2x^2)^3}
\end{aligned}$$

Applichiamo lo *sviluppo di Taylor-MacLaurin* (la formula di Taylor con punto iniziale $x_0 = 0$) arrestata all'ordine 3:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o\big(x^3\big) \\
&= \ln(1) + 0x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 + o\big(x^3\big) = 2x^2 + o\big(x^3\big)
\end{aligned}$$

(c) (2 punti) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $N = 4$, $x_0 = 0$.

Soluzione

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\mathrm{e}^{-x} \\
f''(x) &= \mathrm{e}^{-x} \\
f'''(x) &= -\mathrm{e}^{-x} \\
f^4(x) &= \mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^4(0)}{4!}x^4 + o\big(x^4\big) \\
&= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o\big(x^4\big)
\end{aligned}$$

5. *Problema.* Immagina di aver osservato diverse volte il cestista della tua squadra di pallacanestro e sai che, quando tira tre tiri liberi, tende sempre a totalizzare due punti (fa due canestri su tre). Sai anche che, supponendo che i tre tiri siano eventi indipendenti (il risultato in uno dei tiri non influenza l'esito degli altri), la probabilità di fare due canestri su tre è data da:[1]

$$f(p) = 3p^2(1-p)$$

dove $p \in [0, 1]$ è la probabilità che il cestista faccia canestro ogni singolo tiro.

(a) (2 punti) Calcola il valore della funzione negli estremi dell'intervallo $[0, 1]$ e discuti se sono soddisfatte le ipotesi del *teorema di Rolle*.

[1] Questo è un particolare valore di una distribuzione che in statistica è nota come *distribuzione binomiale*.

Soluzione Essendo f continua e derivabile nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 1]$ ed essendo $f(0) = f(1) = 0$, le ipotesi del teorema sono soddisfatte. Questo significa che esiste almeno un punto $p_0 \in [0, 1]$ tale che $f'(p_0) = 0$.

(b) (3 punti) Calcola la *derivata prima* e *seconda* della funzione nell'insieme di definizione e individua i *punti stazionari* e gli eventuali *punti di flesso*.

Soluzione

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(2p - 3p^2) \\ f''(x) &= 6(1 - 3p) \end{aligned}$$

Per determinare i punti stazionari troviamo le radici di $f'(x)$:

$$\begin{aligned} 2p - 3p^2 &= 0 \\ 3p\left(\frac{2}{3} - p\right) &= 0 \end{aligned}$$

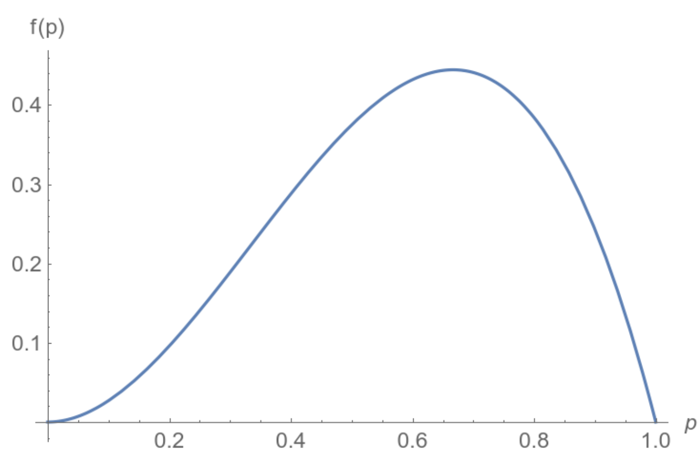
I punti stazionari sono: $\{0, 2/3\}$.
La derivata seconda è minore o uguale a zero, e quindi la funzione è concava, se:

$$1 - 3p \leq 0 \quad \Rightarrow \quad p \in [1/3, +\infty)$$

(c) (2 punti) Individua il punto p_0 di *massimo assoluto* e disegna il grafico della funzione.

Soluzione

$$\max_p f(p) = f(2/3) = 0,\bar{4}$$



(d) (2 punti) Discuti molto brevemente l'interpretazione del grafico e del punto di massimo assoluto individuati al punto precedente.

Soluzione Il grafico rappresenta la probabilità di fare due canestri su tre in funzione della probabilità di fare ognuno dei canestri. Così, ad esempio, se la probabilità di fare un canestro fosse 1/2, la probabilità di fare 2 canestri su 3 sarebbe 0,375.

La probabilità di fare due canestri su tre è massima quando la probabilità di fare ognuno dei canestri è esattamente 2/3.

6. *Problema.* I BOT (Buoni Ordinari del Tesoro) sono titoli del debito pubblico italiano, ovvero prestiti concessi dagli investitori allo Stato italiano, di breve termine (con scadenza di 3, 6 o 12 mesi), per un periodo molto ridotto. Ogni BOT ha valore nominale minimo di 1.000 euro, anche se il prezzo viene espresso sempre per 100 euro di valore nominale.

   Si tratta di titoli “zero coupon”, in cui il rendimento non è basato sul pagamento di una cedola (coupon), ma deriva dalla differenza tra il valore nominale (100), che è la somma che verrà pagata a scadenza al possessore del titolo, e il prezzo di emissione (P).

   Considerando un BOT con scadenza 6 mesi, il prezzo di emissione (P) è collegato al rendimento r (su base annuale espresso in termini percentuali) come segue:

$$P = \frac{100}{1 + \frac{2r}{100}}$$

   (a) (3 punti) Calcola il *limite* di P per $r \to +\infty$, la *derivata prima* e *seconda* di P rispetto ad r e interpreta il risultato. Il prezzo di emissione aumenta o diminuisce all'aumentare del rendimento? La reattività del prezzo al rendimento aumenta o diminuisce all'aumentare del rendimento?

   Soluzione

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{100}{1+\frac{r}{50}} = 0$$

$$P'(r) = -\frac{2}{\left(1+\frac{r}{50}\right)^2} < 0$$

$$P''(r) = \frac{2}{25\left(1+\frac{r}{50}\right)^3} > 0$$

   La derivata prima è sempre negativa (il prezzo diminuisce al crescere del rendimento) e, nel caso di rendimenti positivi o comunque non eccessivamente negativi (gli unici provvisti di un senso economico), la derivata seconda è sempre positiva. Questo implica che la reattività del prezzo al rendimento diminuisce all'aumentare del rendimento.

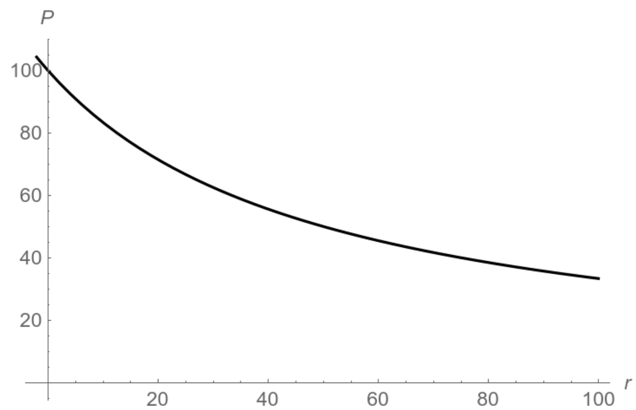
   (b) (2 punti) Considera la funzione nell'intervallo chiuso e limitato $r \in [-2, 100]$. Identifica massimo e minimo e disegna il grafico della funzione.

   Soluzione Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato per il teorema di Weierstrass ha un minimo e un massimo. Essendo la funzione monotòna decrescente il punto di massimo (minimo) assoluto sarà l'estremo sinistro (destro) dell'intervallo: $r = -2$ $(r = 100)$:

$$\begin{aligned}\max_{r\in[-2,100]} P &= P(-2) \approx 104,2 \\ \min_{r\in[-2,100]} P &= P(100) = 33,\bar{3}\end{aligned}$$

L'intercetta con l'asse delle ordinate è: $P(0) = 100$

Il grafico è mostrato sotto.



7. *Problema.* Immagina di tirare una moneta n volte e di totalizzare testa k $(\leq n)$ volte. Non sai se la moneta è truccata o no, ma sai che, se la probabilità di fare testa su un lancio è p, la probabilità di fare testa k volte su n lanci è:

$$L(p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

con $p \in (0, 1)$.

(a) (2 punti) Calcola la *derivata prima* del logaritmo naturale di $L(p)$, $\ln L(p)$, e i relativi *punti stazionari* della funzione.

Soluzione

$$\ln L(p) = \ln\left(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\right) = \ln\binom{n}{k} + k\ln p + (n-k)\ln(1-p)$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p} = \frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p}$$

I punti stazionari sono quelli per cui:

$$\begin{aligned}\frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p} &= 0 \\ \frac{k(1-p) - (n-k)p}{p(1-p)} &= 0 \\ k - n\,p &= 0 \\ p &= \frac{k}{n}\end{aligned}$$

(b) (2 punti) Calcola la *derivata seconda* e determina la *concavità/convessità* di $\ln L(p)$.

Soluzione

$$\frac{\mathrm{d}^2 \ln L(p)}{\mathrm{d}p^2} = -\frac{k}{p^2} - \frac{n-k}{(1-p)^2} < 0$$

La funzione è globalmente concava.

(c) (2 punti) Calcola il *punto di massimo assoluto* e interpreta il risultato.

Soluzione Essendo la funzione globalmente concava, il punto stazionario è un punto di massimo assoluto.

Se la probabilità di fare testa viene assunta pari alla frequenza relativa osservata dei lanci con testa (k/n), la probabilità che sia osservato ciò che si è effettivamente osservato è massima.[2]

8. *Problema.* Supponi che i costi totali (C) che la tua società affronta per produrre un determinato prodotto abbiano una componente fissa, pari a 1500 euro al mese, e una componente variabile, pari a 2 euro per ogni unità prodotta (x):

$$C(x) = 1500 + 2x$$

Ipotizza che il prezzo a cui riesci a vendere i tuoi prodotti (p) sia una funzione decrescente della quantità. In particolare, assumi che il prezzo decresca linearmente con la quantità venduta mensilmente secondo questa relazione:

$$p(x) = 502 - 5x$$

(a) (2 punti) Sapendo che i *ricavi* mensili della società sono pari al prezzo di vendita (p) per la quantità venduta (x) e che i profitti sono dati dalla differenza tra ricavi e costi, deriva la *funzione di profitto*, che lega i profitti (Π) alla quantità prodotta (x).

Soluzione La funzione di profitto sarà data da:

$$\Pi(x) = p(x) \cdot x - C(x) = (502 - 5x)x - (1500 + 2x) = -5x^2 + 500x - 1500$$

(b) (4 punti) Calcola la *derivata prima* e *seconda* della funzione di profitto, le *radici* (gli *zeri*) della funzione e disegna il *grafico* della funzione.

[2] Questo è quello che in statistica si chiama *stimatore di massima verosimiglianza* (*Maximum Likelihood Estimator*), dove $L(p)$ è la *funzione di verosimiglianza* (*likelihood*). Quello che viene massimizzato è di fatto log-$L(p)$: essendo il logaritmo una funzione monotòna, la trasformazione non modifica i punti di massimo, ma rende molto più semplici i calcoli, perché trasforma i prodotti in somme.

Soluzione La funzione di profitto è una funzione quadratica. Il grafico associato è una parabola concava con l'asse parallelo all'asse delle ordinate.

La derivata prima e seconda sono uguali a:

$$\begin{aligned}\Pi'(x) &= -10x + 500 \\ \Pi''(x) &= -10\end{aligned}$$

Gli zeri della funzione sono dati dalla soluzione dell'equazione associata:

$$\begin{aligned}-5x^2 + 500x - 1500 &= 0 \\ x^2 - 200x + 300 &= 0 \\ x_{1,2} &= 50 \pm 10\sqrt{22}\end{aligned}$$

da cui $x_1 \approx 3,1$ e $x_2 \approx 96,9$.

La funzione è globalmente concava ($\Pi''(x) < 0 \ \forall x \in \mathcal{R}$) e il punto stazionario è il punto di massimo assoluto (corrispondente all'ascissa del vertice):

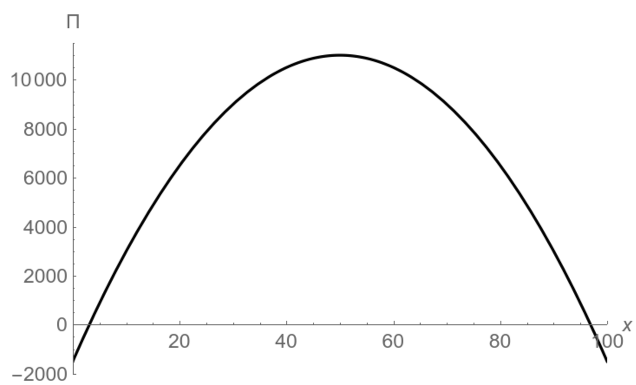
$$-10\,x_0 + 500 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 50$$

Il valore dell'ordinata in corrispondenza di tale ascissa è:

$$\max \Pi = -5x_0^2 + 500x_0 - 1500 = 11.000$$

Il valore dell'intercetta con l'asse delle ordinate è pari a -1500.

Il grafico della funzione è mostrato sotto.



(c) (2 punti) Determina: i) la/le quantità di *break-even* (quelle in corrispondenza delle quali il profitto è nullo); ii) la quantità che massimizza il profitto; iii) il profitto massimo.

Soluzione I punti di break-even sono le radici della funzione: per ottenere un profitto la società deve produrre più di 3 unità e meno di 97 unità..

La società ottiene un profitto massimo pari a 11 mila euro al mese producendo 50 unità (il punto di massimo assoluto individuato al punto precedente).

(d) (2 punti) Supponi che la società riesca a vendere tutte le unità che produce ad un prezzo pari a 5 euro. Calcola la funzione di profitto in questo caso e determina la quantità di break-even e il profitto massimo ottenibile dalla società in questo caso.

Soluzione Il profitto totale in questo caso è pari a:

$$\Pi(x) = 5x - 1500 - 2x = -1500 + 3x$$

Si tratta di una funzione lineare che ha intercetta con l'asse delle ascisse pari a $x = 500$. Essendo una funzione monotòna crescente in un intervallo illimitato superiormente, $x \in [0, +\infty)$, la funzione non ha un massimo: se veramente la società riuscisse a vendere tutto quello che produce a 5 euro e i costi variabili medi fossero costanti e inferiori al prezzo, la società potrebbe sempre aumentare gli utili aumentando la produzione.

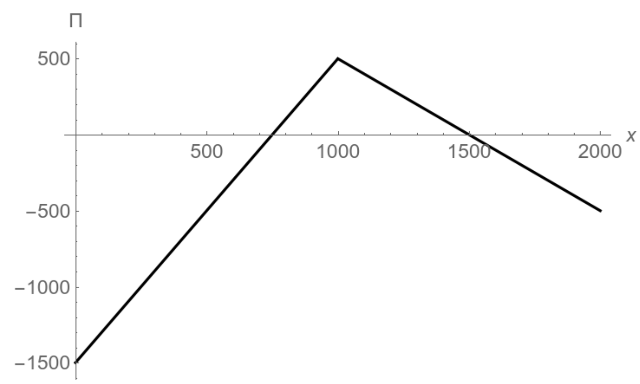
(e) (2 punti) Supponi che la società riesca a vendere mensilmente fino a 1000 unità prodotte ad un prezzo costante e pari a 4 euro, mentre le unità oltre la millesima riesca a venderle solo ad un prezzo pari a 1 euro l'una. Deriva la funzione di profitto in questo caso e disegna il grafico associato.

Soluzione La funzione in questo caso è data da:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 4x - (1500 + 2x) & \text{se } x \leq 1000 \\ 4000 + (x - 1000) - (1500 + 2x) & \text{se } x > 1000 \end{cases}$$

$$\Pi(x) = \begin{cases} -1500 + 2x & \text{se } x \leq 1000 \\ 1500 - x & \text{se } x > 1000 \end{cases}$$

Il grafico è mostrato sotto.



(f) (2 punti) Calcola la derivata della funzione di profitto ottenuta al punto precedente e determina la quantità che massimizza il profitto dell'impresa.

Soluzione Si tratta di una spezzata che, pur essendo continua, non è derivabile in $x = 1000$. La derivata è uguale a:

$$\Pi'(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1000 \\ -1 & \text{se } x > 1000 \end{cases}$$

La società troverà conveniente aumentare la produzione fino a quando $x < 1000$ (la derivata è positiva e quindi gli utili sono crescenti) e ridurre se $x > 1000$ (la derivata è negativa e quindi gli utili decrescono all'aumentare della quantità), quindi produrrà esattamente 1000 unità, ottenendo un utile di 500 euro.

9. *Problema.* La classe di funzioni note come *funzioni logistiche* ha applicazioni in campi disparati come l'ecologia, la fisica, la statistica, il *machine learning*, l'economia e la sociologia (ad es. nei modelli di diffusione delle innovazioni).

   La seguente funzione logistica viene derivata nel *modello di Verhulst*, che analizza la crescita della popolazione e in cui si assume che questa cresca esponenzialmente, ma ad un tasso che diminuisce al diminuire delle risorse:

$$y(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{y_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-g \cdot t}}$$

   dove e è il numero di Nepero (o Eulero); y_0, g e k sono *parametri strettamente positivi* che indicano, rispettivamente, la popolazione iniziale, il tasso di crescita in assenza di limitazioni e la cosiddetta *carrying capacity* (la capacità di carico determinata dalle risorse disponibili), ipotizzata maggiore del livello iniziale della popolazione ($k > y_0 > 0$); t è il tempo; $y(t)$ la popolazione nell'istante t.

   (a) (1 punto) Determina l'*insieme di esistenza* della funzione.

   Soluzione Essendo $\mathrm{e}^{-g \cdot t} > 0$ per ogni $t \in \mathcal{R}$, l'insieme di definizione è l'insieme dei numeri reali.

   (b) (2 punti) Determina le *intersezioni con gli assi* e il *segno della funzione*: $y(t) \geq 0$.

   Soluzione L'intersezione con l'asse delle ordinate è data da:

$$y(0) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{y_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-g \cdot 0}} = \frac{k}{1 + \frac{k}{y_0} - 1} = y_0$$

   Essendo $k > y_0 > 0$, numeratore e denominatore sono sempre positivi[3] e quindi $y(t) > 0$ per ogni $t \in \mathcal{R}$ e la funzione non ha intersezioni con l'asse delle ascisse.

   (c) (2 punti) Calcola il *limite* di $y(t)$ per $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$.

   Soluzione La funzione è continua nell'insieme di definizione derivando dalla somma e rapporto di funzioni elementari.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{y_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-g \cdot t}} = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{y_0} - 1\right) \cdot 0^+} = k^-$$

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{y_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-g \cdot t}} = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{y_0} - 1\right) \cdot (+\infty)} = 0^+$$

   (d) (3 punti) Calcola la *derivata prima* e determina i valori per cui la funzione è *crescente/decrescente* studiandone il segno.

[3] L'esponenziale restituisce sempre un valore strettamente positivo.

Soluzione

$$y'(t) = \frac{g\,k\left(\frac{k}{y_0}-1\right)\mathrm{e}^{-g\cdot t}}{\left(1+\left(\frac{k}{y_0}-1\right)\mathrm{e}^{-g\cdot t}\right)^2} > 0$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, essendo un quadrato, e il numeratore è sempre positivo, essendo g e k positivi e $k/y_0 > 1$ avendosi $k > y_0$, la disequazione è soddisfatta per ogni $t \in \mathcal{R}$ e la funzione è monotòna crescente.

(e) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* e determina la *concavità/convessità* della funzione e gli eventuali *punti di flesso*.

Soluzione Fissiamo $C(t) = \left(\frac{k}{y_0}-1\right)\mathrm{e}^{-g\cdot t}$ notando che $C'(t) = -g\,C(t)$. La derivata seconda è data da:

$$y''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{g\,k\,C(t)}{\Big(1+C(t)\Big)^2}\right] = \frac{-g^2k\,C(t)\Big(1+C(t)\Big)^2 - 2\,g\,k\,C(t)\,\Big(1+C(t)\Big)\Big(-g\,C(t)\Big)}{\Big(1+C(t)\Big)^4}$$

$$= \frac{-g^2k\,C(t)\Big(1+C(t)\Big) + 2\,g^2\,k\,C(t)^2}{\Big(1+C(t)\Big)^3} = \frac{g^2\,k\,C(t)\Big(C(t)-1\Big)}{\Big(1+C(t)\Big)^3}$$

Essendo $C(t) > 0$, il segno della derivata è determinato dal segno di $C(t) - 1$, da cui:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k}{y_0}-1\right)\mathrm{e}^{-g\cdot t} &\geq 1 \\
\mathrm{e}^{-g\cdot t} &\geq \frac{y_0}{k-y_0} \\
-g\cdot t &\geq \ln\left(\frac{y_0}{k-y_0}\right) \\
t &\leq -\frac{1}{g}\ln\left(\frac{y_0}{k-y_0}\right) \\
t &\leq \frac{1}{g}\ln\left(\frac{k}{y_0}-1\right)
\end{aligned}$$

per cui la funzione avrà un punto di flesso obliquo per $t = \frac{1}{g}\ln(k/y_0 - 1)$, sarà convessa per valori inferiori a quello e concava per valori superiori.

(f) (2 punti) Calcola *massimi*, *minimi* ed *estremi superiore* ed *inferiore* di $y(t)$.

Soluzione Essendo monotòna crescente su un insieme illimitato inferiormente e superiormente, la funzione non ha massimi e minimi[4] e l'estremo superiore (inferiore) è uguale al limite per $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$):

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \sup_{t\in\mathcal{R}}\, y(t) = k$$

[4]Il teorema di Weierstrass non si applica in quanto, nonostante la funzione sia continua, l'insieme non è chiuso e limitato.

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = \inf_{t \in \mathcal{R}} \ y(t) = 0$$

(g) (2 punti) Disegna un *grafico qualitativo* della funzione $y(t)$ ipotizzando che $k = 2y_0$.

Soluzione