# ESERCITAZIONE VIII

## ESERCIZIO 1

Delle seguenti funzioni:

$$1)\quad f(x) = 4x^3 - x^2 - 14x$$

$$2)\quad f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$$

i) Derminare l'insieme di esistenza;

ii) Determinare le intersezioni con gli assi e il segno della funzione : $f(x) \geq 0$

iii) Calcolare gli asintoti

iv) Calcolare la derivata prima e determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente/decrescente studiando il segno della derivata : $f'(x) \geq 0$

v) Calcolare la derivata seconda e determinare gli intervalli in cui la funzione è concava/convessa e gli eventuali punti di flesso;

vi) Calcolare massimi, minimi ed estremi superiori e inferiori della funzione $f(x)$;

vii) Disegnare il grafico qualitativo della funzione $f(x)$.

a) $f(x) = 4x^3 - x^2 - 14x$

i) $CE(f) = \mathbb{R}$

ii) Intersezione con l'asse x $(y=0)$

$$\begin{cases} y = 4x^3 - x^2 - 14x \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^3 - x^2 - 14x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(4x^2 - x - 14) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad 4x^2 - x - 14 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \quad x_{1,2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{1 + 224}}{8} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 15}{8} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \quad x = 2 \quad x = -\dfrac{7}{4} \\ y = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Intersezione con l'asse x nei punti $(0,0)$, $(2,0)$ $(-\frac{7}{4}, 0)$

Intersezione con l'asse y $(x=0)$

$$\begin{cases} y = 4x^3 - x^2 - 14x \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 4 \cdot 0^3 - 0^2 - 14 \cdot 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Intersezione con l'asse y nel punto $(0,0)$

Determiniamo il segno della funzione $f(x) \geq 0$

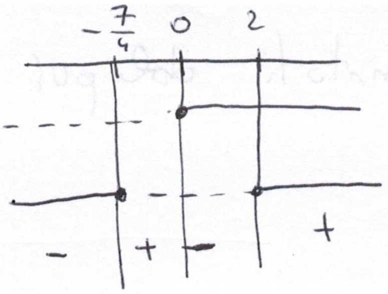
$f(x) \geq 0 \qquad 4x^3 - x^2 - 14x \geq 0 \qquad x(4x^2 - x - 14) \geq 0$

I $\quad x \geq 0$

II $\quad 4x^2 - x - 14 \geq 0 \qquad 4x^2 - x - 14 = 0$ ha soluzioni $x = 2$ e $x = -\frac{7}{4}$

Dunque $4x^2 - x - 14 \geq 0$ ha soluzione

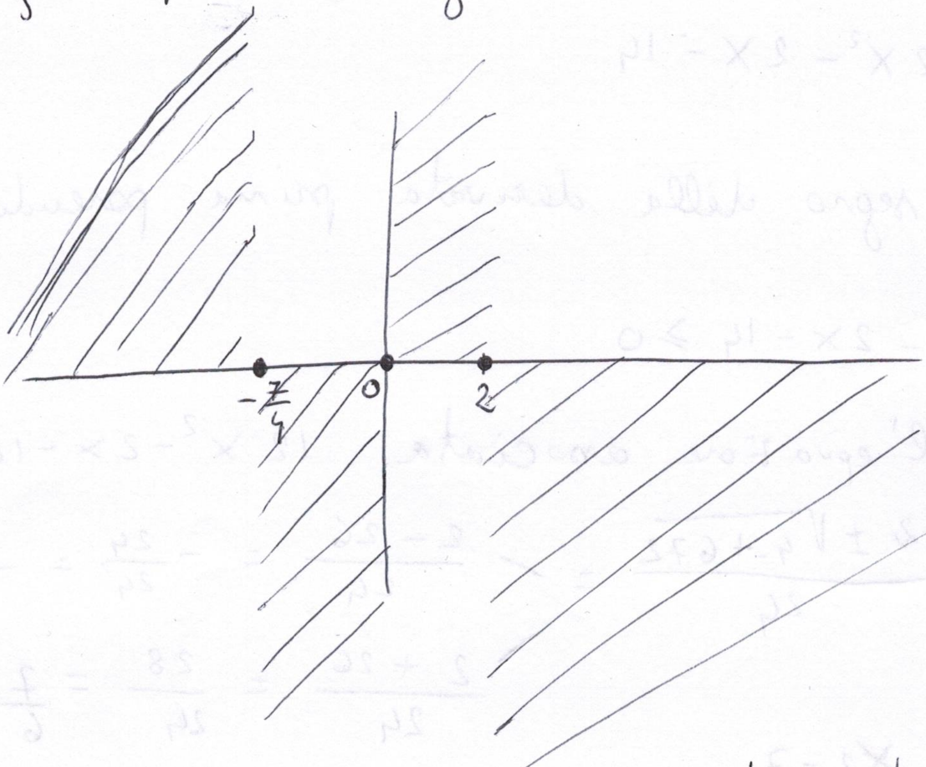
$$x \leq -\frac{7}{4} \quad \vee \quad x \geq 2$$




La funzione ha segno negativo negli intervalli

$$\left(-\infty, -\frac{7}{4}\right) \text{ e } (0, 2)$$

e ha segno positivo negli intervalli $\left(-\frac{7}{4}, 0\right)$ e $(2, +\infty)$




iii) la funzione non presenta asintoti verticali

Calcoliamo, se esistono gli asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 4x^3 - x^2 - 14x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 4x^3 - x^2 - 14x = +\infty$$

La funzione non presenta asintoti orizzontali, ricerchiamo quelli obliqui:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^3 - x^2 - 14x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^3}^{\,2}\left(4 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{14}{x^2}}_{\to 0}\right)}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} 4x^2 = +\infty \implies \text{Non esistono asintoti obliqui}$$

$\implies$ La funzione non presenta asintoti

iv) Calcoliamo la derivata prima della funzione

$$f(x) = 4x^3 - x^2 - 14x$$

$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 14$$

Studiamo il segno della derivata prima ponendo $f'(x) \geq 0$

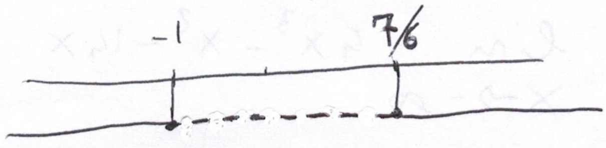
$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 14 \geq 0$$

Risolviamo l'equazione associata $12x^2 - 2x - 14 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 672}}{24} = \begin{cases} \dfrac{2 - 26}{24} = -\dfrac{24}{24} = -1 \\[2ex] \dfrac{2 + 26}{24} = \dfrac{28}{24} = \dfrac{7}{6} \end{cases}$$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 7$

$$12x^2 - 2x - 14 \geq 0 \iff x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq \frac{7}{6}$$



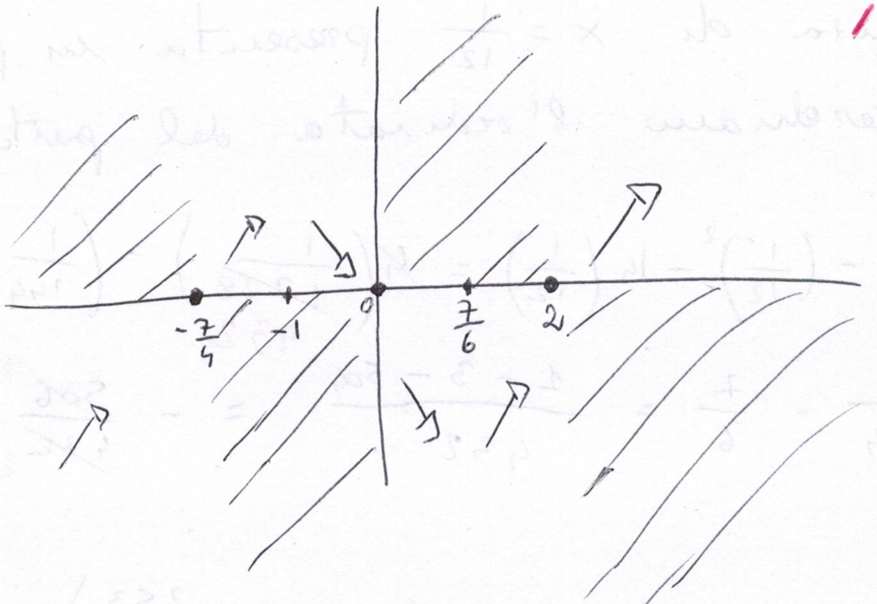

Segno della derivata $+ \qquad - \qquad +$

Monotonia della funzione $\nearrow \qquad \searrow \qquad \nearrow$

La funzione è crescente negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $\left(\frac{7}{6}, +\infty\right)$

La funzione è decrescente nell'intervallo $\left(-1, \frac{7}{6}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

v) Calcoliamo la derivata seconda

$$f(x) = 4x^3 - x^2 - 14x$$

$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 14$$

$$f''(x) = 24x - 2$$

Studiamo il segno della derivata seconda $(f''(x) \geq 0)$ per individuare gli intervalli in cui la funzione è concava/convessa e gli eventuali punti di flesso

$$f''(x) \geq 0 \qquad 24x - 2 \geq 0 \qquad x \geq \frac{2}{24} \qquad x \geq \frac{1}{12}$$

| | $\frac{1}{12}$ | |
|---|---|---|
| Segno della derivata seconda | $-$ | $+$ |
| Concavità della funzione | $\cap$ | $\cup$ |

La funzione è concava nell'intervallo $(-\infty, \frac{1}{12})$ mentre è convessa nell'intervallo $(\frac{1}{12}, +\infty)$

In corrispondenza di $x = \frac{1}{12}$ presenta un punto di flesso. Ricerchiamo l'ordinata del punto di flesso

$$y = 4\left(\frac{1}{12}\right)^3 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 - 14\left(\frac{1}{12}\right) = \cancel{4}\left(\frac{1}{\cancel{1728}_{432}}\right) - \left(\frac{1}{144}\right) - \cancel{14}^{7}\frac{1}{\cancel{12}_{6}} =$$

$$= \frac{1}{432} - \frac{1}{144} - \frac{7}{6} = \frac{1-3-504}{432} = -\frac{\cancel{506}^{253}}{\cancel{432}_{216}} = -\frac{253}{216}$$

$\simeq -1{,}17$

Punto di flesso in $\left(\frac{1}{12}, -\frac{253}{216}\right)$

vi) Poiché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ si ha che l'estremo superiore della funzione è $+\infty$ $\sup(f(x)) = +\infty$

Poiché $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ si ha che l'estremo inferiore della funzione è $-\infty$ $\inf(f(x)) = -\infty$

Dallo studio della derivata prima individuiamo un minimo in $x = \frac{7}{6}$ e un massimo in $x = -1$

Calcoliamo le ordinate dei punti di massimo e minimo

$$f\left(\frac{7}{6}\right) = y = 4\left(\frac{7}{6}\right)^3 - \left(\frac{7}{6}\right)^2 - \cancel{14}^{7}\left(\frac{7}{\cancel{6}_{3}}\right) = \cancel{4}^{2}\left(\frac{343}{\cancel{216}_{108}}\right) - \frac{49}{36} - \frac{49}{3}$$

$$= \frac{686 - 147 - 1764}{108} = -\frac{1225}{108} \simeq -11{,}34$$

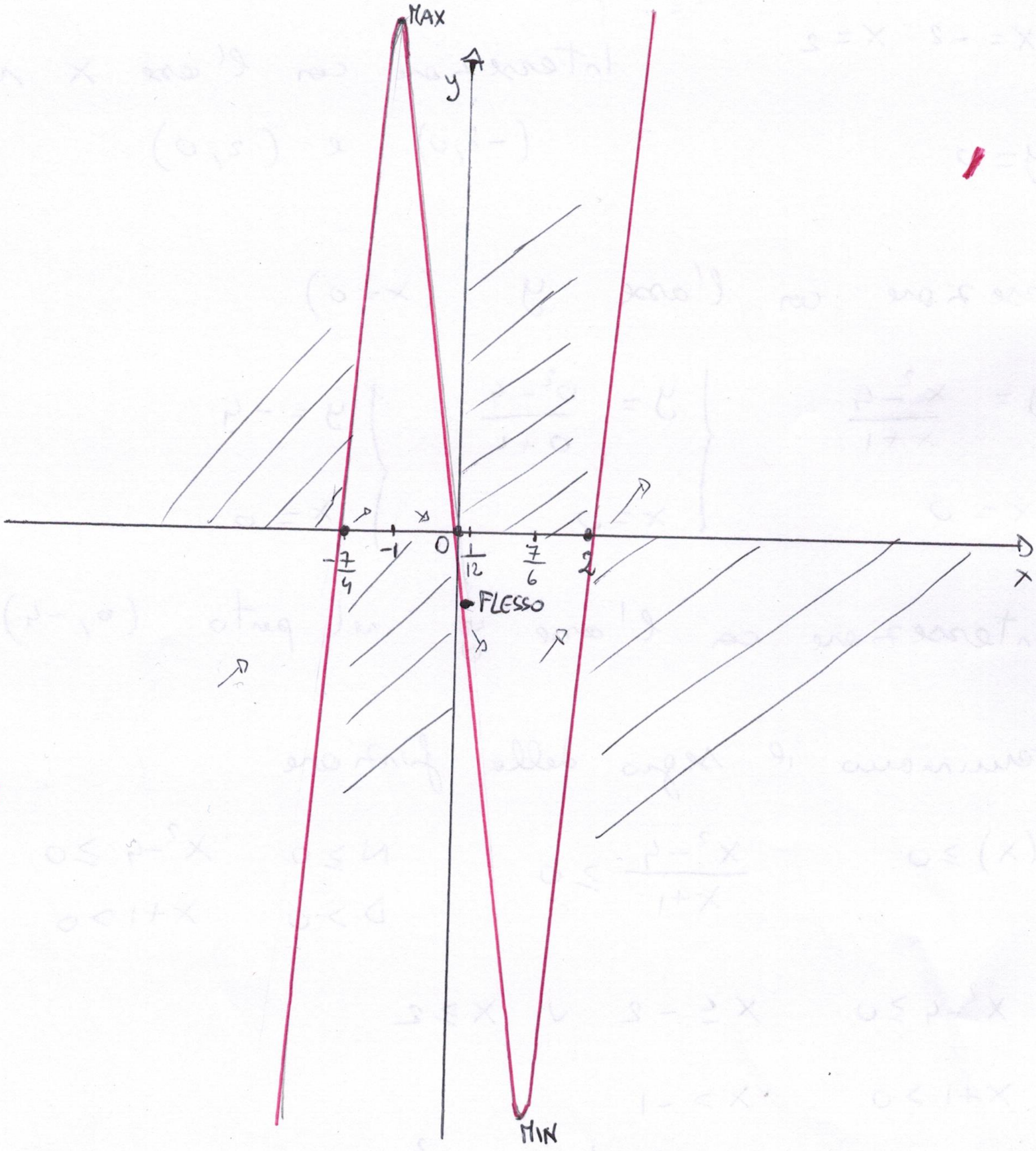
Punto di Minimo $\left(\frac{7}{6}, -11{,}34\right)$

$f(-1) = 4(-1)^3 - (-1)^2 - 14(-1) = 4(-1) - (+1) - 14(-1) =$

$= -4 - 1 + 14 = 9$

Punto di massimo $(-1, 9)$

vii)




b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$

i) $CE(f)$: $x+1 \neq 0 \quad x \neq -1$

$Dom(f)$: $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

ii) Intersezione con l'asse x ( $y=0$ )

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2-4}{x+1} \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+1} = 0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2)(x+2) = 0 \quad \text{con } x \neq -1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \quad x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Intersezione con l'asse x nei punti $(-2,0)$ e $(2,0)$

Intersezione con l'asse y ( $x=0$ )

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2-4}{x+1} \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{0^2-4}{0+1} \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-4 \\ x=0 \end{cases}$$

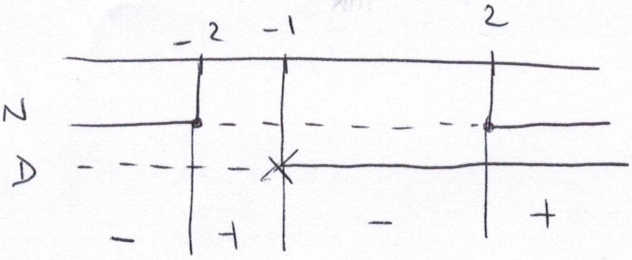
Intersezione con l'asse y nel punto $(0,-4)$

Determiniamo il segno della funzione

$$f(x) \geq 0 \qquad \frac{x^2-4}{x+1} \geq 0 \qquad \begin{matrix} N \geq 0 & x^2-4 \geq 0 \\ D > 0 & x+1 > 0 \end{matrix}$$

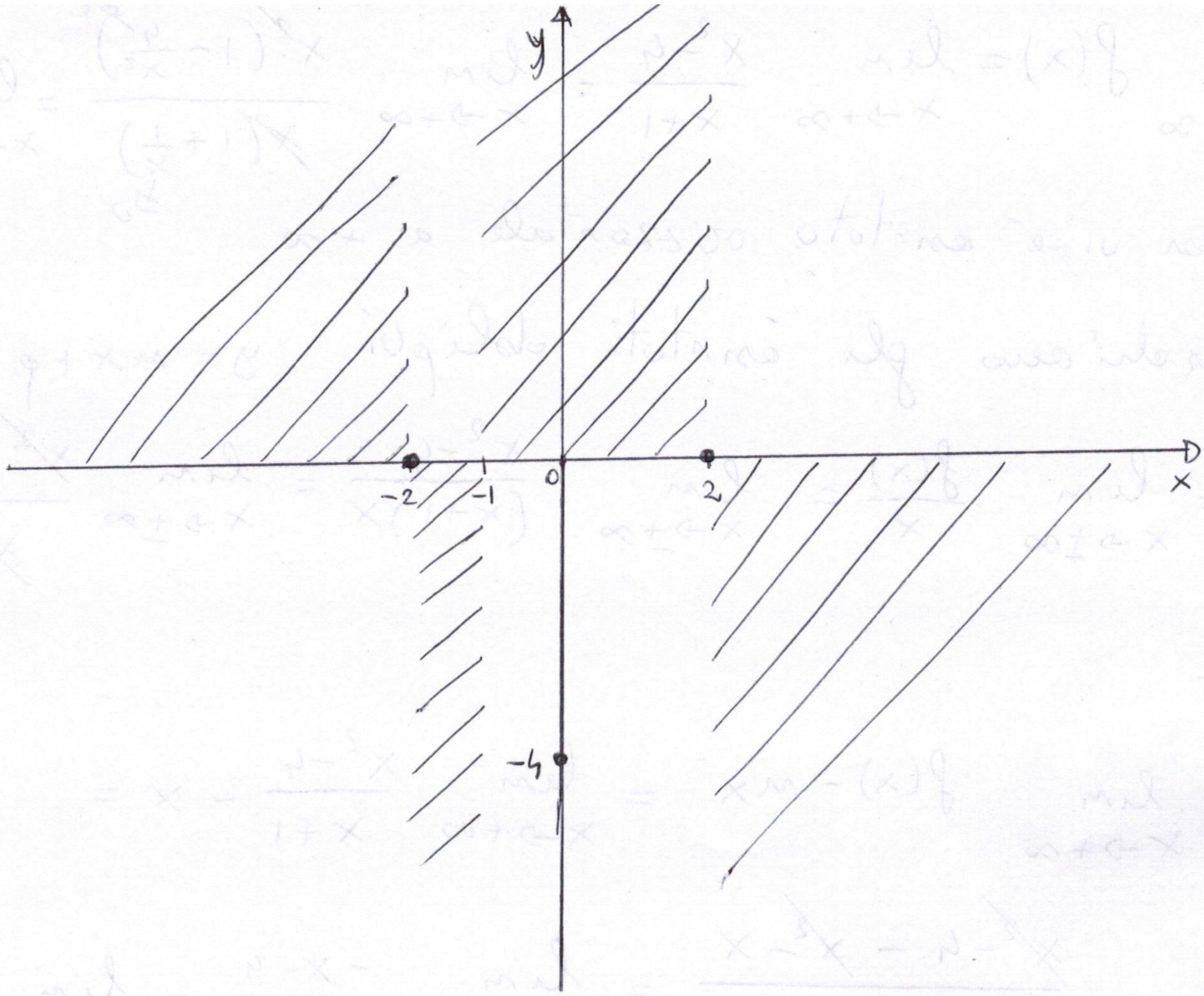
N: $x^2-4 \geq 0 \qquad x \leq -2 \lor x \geq 2$

D: $x+1 > 0 \qquad x > -1$




La funzione è positiva negli intervalli $(-2,-1)$ e $(2,+\infty)$

ed è negativa negli intervalli $(-\infty,-2)$ e $(-1,2)$




iii) Calcoliamo gli asintoti verticali

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-4}{x+1} = \frac{(-1^-)^2-4}{(-1^-)+1} = \frac{1-4}{0^-} = \frac{-3}{0^-} =$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-4}{x+1} = \frac{(-1^+)^2-4}{(-1^+)+1} = \frac{1-4}{0^+} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$x = -1$ è asintoto verticale per la funzione

Calcoliamo gli asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left(1-\overset{\to 0}{\frac{4}{x^2}}\right)}{\cancel{x}\left(1+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to -\infty} x$$

$= -\infty$ Non vi è l'asintoto orizzontale a $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{2}}(1-\overbrace{\tfrac{4}{x^2}}^{\to 0})}{\cancel{x}(1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0})} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Non vi e' asintoto orizzontale a $+\infty$

Ricerchiamo gli asintoti obliqui $y = mx + q$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{(x+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}(1-\overbrace{\tfrac{4}{x^2}}^{\to 0})}{\cancel{x^2}(1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0})} =$$

$= 1$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x+1} - x =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}-x}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x-4}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\cancel{x}(1+\overbrace{\tfrac{4}{x}}^{\to 0})}{\cancel{x}(1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0})}$$

$= -1$

$y = x - 1$ e' asintoto obliquo per la funzione

iv) Calcoliamo la derivata prima

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-(x^2-4)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2+4}{(x+1)^2} =$$

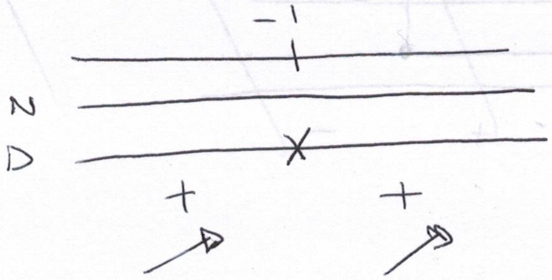
$$= \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2} = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}$$

Studiamo il segno della derivata $f'(x) \geq 0$

$$\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2} \geq 0$$

$N \geq 0 \quad (x+2)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$D > 0 \quad (x+1)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$




La funzione e' crescente negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(-1, +\infty)$

La funzione non presenta intervalli in cui e' decrescente

v) Calcoliamo la derivata seconda

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x+2)(x+1)^2 - 2(x+2)^2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)(x+2)(\cancel{x}+1-\cancel{x}-2)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{-2\cancel{(x+1)}(x+2)}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}} = -\frac{2(x+2)}{(x+1)^3}$$

Studiamo il segno della derivata seconda $f''(x) \geq 0$

$$-\frac{2(x+2)}{(x+1)^3} \geq 0 \qquad \frac{2(x+2)}{(x+1)^3} \leq 0$$

$N \geq 0 \quad +2(x+2) \geq 0 \quad +2x+4 \geq 0 \quad +2x \geq -4 \quad x \geq -2$

$D > 0 \quad (x+1)^3 > 0 \quad x+1 > 0 \quad x > -1$

| | $-2$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|---|
| N | | | | |
| D | $+$ | | $-$ | $+$ |
| | $\cup$ | | $\cap$ | $\cup$ |

La funzione è concava nell'intervallo $(-2,-1)$

La funzione è convessa nell'intervallo $(-\infty,-2)$ e $(-1,+\infty)$

La funzione presenta un flesso in $x=-2$

Nel punto $(-2,0)$

vi) La funzione non presenta massimi e minimi -

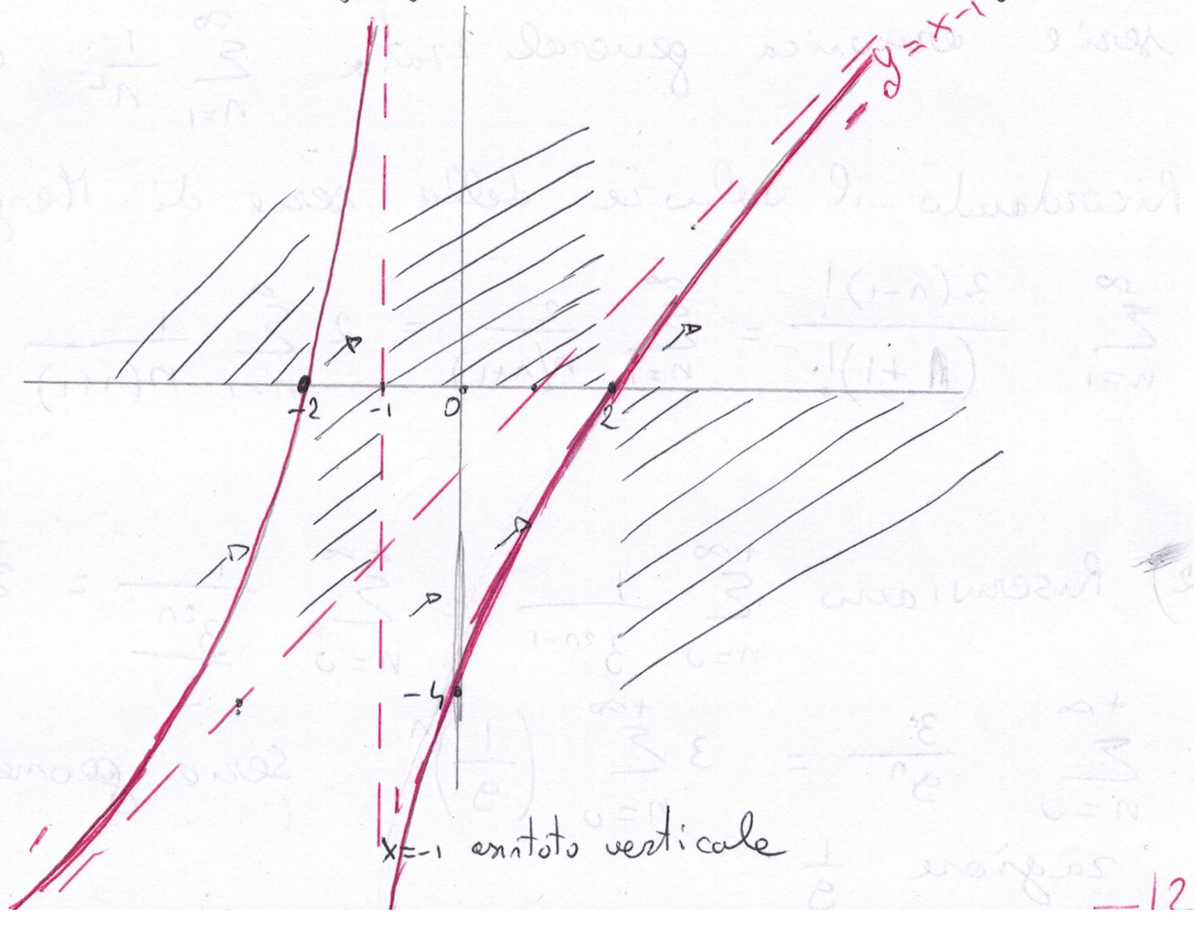
Essa ha come estremo superiore $+\infty$

$$\sup f(x) = +\infty$$

e come estremo inferiore $-\infty$

$$\inf f(x) = -\infty$$

vii)



ESERCIZIO 2 Dopo aver verificato la convergenza calcolare la somma delle seguenti serie

1) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(n-1)!}{(n+1)!}$$

2) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{2n-1}}$$

1) Riscriviamo
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n-1)!}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cancel{(n-1)!}}{(n+1)n\cancel{(n-1)!}} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

Poiché $\frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{2}{n^2}$ la serie in questione è convergente poiché dell'ordine di infinitesimo di una serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ con $\alpha = 2 > 1$

Ricordando il valore della serie di Mengoli, si trova

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n-1)!}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2$$

2) Riscriviamo
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\frac{3^{2n}}{3}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{3^{2n}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{9^n} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n$$ serie geometrica di ragione $\frac{1}{9}$

Poiché $-1 < \frac{1}{9} < 1$ la serie converge.

La sua somma è $S_n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} =$

$$= \frac{1}{\frac{9-1}{9}} = \frac{1}{\frac{8}{9}} = \frac{9}{8}$$

ESERCIZIO 3 Verificare (utilizzando la condizione necessaria per la convergenza delle serie) che le seguenti serie non convergano

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{3}{n^2}}$$

Ricordiamo che la condizione necessaria di convergenza è $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

1) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log n^{-\frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}\log n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\log n}{n}} = e^{\underbrace{\lim_{n\to+\infty} -\frac{\log n}{n}}_{\to 0 \text{ confronto tra infiniti}}} = e^0 = 1$$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \neq 0$ la serie non converge

2) $$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log n^{\frac{3}{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{3}{n^2}\log n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{3\frac{\log n}{n^2}} = e^0 = 1$$

Confronto Tra infiniti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^2} = 0$$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \neq 0 \Rightarrow$ la serie non converge.

ESERCIZIO 4 Utilizzando i criteri del rapporto, della radice, del confronto e dell'ordine di infinitesimo dire se le seguenti serie (a termini positivi) convergono

1) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$

2) $\displaystyle\sum_{n=8}^{+\infty} \frac{1}{n-2\sqrt[3]{n}}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+n^{\pi}}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

1) Usiamo il criterio del confronto

Poiché $\forall n \geq 3$ si ha che $\log n > 1$

$\Rightarrow \dfrac{\log n}{n} > \dfrac{1}{n}$ Dunque la nostra serie è un maggiorante di una serie divergente, e pertanto diverge

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\log n}{n} \geq \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}$ serie armonica divergente

2) $\displaystyle\sum_{n=8}^{+\infty} \frac{1}{n-2\sqrt[3]{n}}$

La serie $\displaystyle\sum_{n=8}^{+\infty} \frac{1}{n-2\sqrt[3]{n}}$ diverge a $+\infty$.

Infatti il suo termine n-esimo $a_n = \dfrac{1}{n-2\sqrt[3]{n}}$ è asintotico a $b_n = \dfrac{1}{n}$ valendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-2n^{\frac{1}{3}}} = 1$$

Poiché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$, il criterio dell'ordine di infinitesimo permette di concludere che la serie proposta diverge a $+\infty$.

3) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+n^{\pi}}$ converge

Per vederlo basta applicare il criterio dell'ordine di infinitesimo usando la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ con $\alpha = \pi - \frac{1}{2} > 1$

infatti $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{\sqrt{n}}{2n+n^\pi}}{\frac{1}{n^{\pi-\frac{1}{2}}}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^\pi}{2n+n^\pi} = 1$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

usiamo il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2^n}\cdot 2 \cdot \cancel{(n+1)}\cancel{n!}\; n^n}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}\; \cancel{2^n}\; \cancel{n!}} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$2 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 2\frac{1}{e} < 1$$

Dunque la serie converge

5) Usiamo il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}} =$$

$= \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1$ Dunque la serie converge

ESERCIZIO 5 Utilizzando il criterio delle serie a segno alterno, discutere la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$

2) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\log n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2} = 0$

Poiché $\sqrt{n+1}+2 > \sqrt{n}+2$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+2} < \frac{1}{\sqrt{n}+2}$$

Dunque la successione $\{a_n\}_{n\geq 1} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}+2}\right\}_{n\geq 1}$ è monotona decrescente

Per il criterio delle serie a segno alterno la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$ converge semplicemente.

Invece non converge assolutamente, infatti essendo $\sqrt{n}+2 < n+2$ si ha $\frac{1}{\sqrt{n}+2} > \frac{1}{n+2}$

dunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$ diverge, in quanto maggiorante di una serie divergente.

2) $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log n} = 0$

La funzione logaritmo in base e è monotona crescente.
Quindi $\forall n \geq 1$ $\log(n+1) > \log n$, e dunque per $n \geq 2$

$$\frac{1}{\log(n+1)} < \frac{1}{\log n}$$

Pertanto la successione $\left\{\frac{1}{\log n}\right\}_{n\geq 3}$ è strettamente decrescente.

Per il criterio delle serie a segno alterno, la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$ converge

Invece non converge assolutamente, infatti $\forall n \geq 3$
$\log n < n$ e dunque $\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$
Pertanto la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\log n}$ diverge in quanto maggiorante di una serie divergente.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge
la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ converge assolutamente e anche semplicemente.