Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano – Bicocca

FOGLIO DI ESERCIZI 4: successioni e serie di funzioni.

Foglio da consegnare in aula durante la lezione di **venerdí 29 Novembre 2019**.
Non si accetteranno fogli consegnati in altro momento e in altra modalità. **I fogli vanno pinzati.**
Mercoledí 4 Dicembre 2019 saranno riconsegnati in aula i fogli corretti e verrá discussa la correzione in aula dal tutor.

NOME E COGNOME:

---

1. Data una successione $\{a_n\}_{n>0}$ di numeri reali, si consideri la funzione f_n, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{a_n x}{n} & \text{se } 0 < x \leq n \\ a_n & \text{se } n < x < 2n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$ nei seguenti casi:

a. $a_n = n$

b. $a_n = \sqrt{n}$

c. $a_n = 1/n$

2. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^5 e^{nx^5},$$

a. si determini l'insieme A di convergenza puntuale e si calcoli la somma f;

b. si stabilisca se la serie converge uniformemente in A.

3. Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la successione di funzioni con $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = n^2 \log\left(1 + \frac{x^{3/2}}{n^2}\right).$$

a. si studi la convergenza puntuale della successione determinando la funzione limite;

b. si studi la convergenza uniforme della successione.

4. Data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \sqrt{n}x^n \log\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right),$$

a. si stabilisca se
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x;$$

b. si determini l'insieme di convergenza uniforme della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

5. Al variare di α positivo si determini l'insieme di convergenza semplice e uniforme di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(n+1)\log^{\alpha} n}$$

6. Si calcoli, con un errore inferiore a 10^{-2}, l'integrale

$$\int_{-1/2}^{0} \frac{\cos x^2 - 1}{x^3}\, \mathrm{d}x.$$

7. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{(n+1)^2}.$$

a. Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;

b. se ne calcoli la somma e la si indichi con $f(x)$;

c. si calcoli, con un errore inferiore a 10^{-3}, l'integrale

$$\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$