

FOGLIO DI ESERCIZI 5: integrali multipli.

Foglio da consegnare in aula durante la lezione di **mercoledì 8 Gennaio 2020**.

Non si accetteranno fogli consegnati in altro momento e in altra modalità. **I fogli vanno pinzati.**
Mercoledì 15 Gennaio 2020 saranno riconsegnati i fogli corretti e verrà discussa la correzione in aula dal tutor.

Gli esercizi con “*” sono piú difficili degli altri !

NOME E COGNOME:

1. Sia

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x^2} \leq y \leq \frac{2}{x^2} ; x \leq y \leq 2x \right\}$$

Calcolare

$$\int_D \frac{y}{1+yx^2} dx dy$$

2. Per ogni $r \geq 0$ sia $A_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2zr\}$.

a. Si calcoli il volume di A_r ;

b. si calcoli $\int_{A_r} z^2 \, dx \, dy \, dz$;

c. si determini $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che esiste finito $\int_{A_2} (y^2 + (z-1)^2 + x^2)^\alpha \, dx \, dy \, dz$.

3. Sia $R > 2\sqrt{2}$ e sia

$$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{|x|} + \sqrt[3]{|y|} \leq R\}.$$

Calcolare

a. $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} e^{-|x|-|y|} dx dy :$

b.* $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} e^{-|x+y|} dx dy;$

c. $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} x e^{-|x+y|} dx dy.$

4. Sia

$$f(x, y, z) = \frac{y}{(z^2 + x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Si stabilisca

a.* se f é integrabile in

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 < z^2 < x^2 + y^2, x > 0, y > 0, 0 < z < x^2 + y^2 < 1\}.$$

In caso affermativo si calcoli $\int_D f \, dx \, dy \, dz$;

b. i valori di $\alpha > 0$ per cui la funzione $g(x, y, z) = zf(x, y, z)$ é integrabile in

$$E_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < (x^2 + y^2)^\alpha \leq 10, x > 0\}.$$

Per tali valori di α si calcoli $\int_{E_\alpha} g \, dx \, dy \, dz$.

5. Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, (|x| - 1)^2 + y^2 \geq 1\}.$$

a. Si calcoli l'area di D ;

b.* si determinino gli $\alpha > 0$ tale che esiste finito

$$\int_D \frac{e^x}{|y|^\alpha \sin y} dx dy$$

e lo si calcoli;

c. si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di D intorno all'asse x ;

6. Sia E l'ellissoide in \mathbb{R}^3 dato da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

con a , b e c positivi.

a. Si calcoli il volume di E ;

b. sia E' l'ellissoide che si ottiene traslando E del vettore $(a, 0, 0)$; si calcoli il volume di $F = E \setminus E'$;

c. si calcoli

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_F z \, dx \, dy \, dz.$$