Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano – Bicocca

FOGLIO DI ESERCIZI 6: equazioni differenziali.

Foglio da consegnare in aula durante la lezione di **mercoledí 22 Gennaio 2020**. Non si accetteranno fogli consegnati in altro momento e in altra modalità. **I fogli vanno pinzati.**
Venerdí 24 Gennaio 2020 saranno riconsegnati in aula i fogli corretti e verrá discussa la correzione in aula dal tutor.
Gli esercizi con "*" sono piú difficili degli altri !

NOME E COGNOME:

---

1. Si determini l'integrale generale di

   a. $y' = \dfrac{e^{x-y}}{1+e^x}$

   b. $xy' + y = 3x^3 - 1, \qquad \text{per } x > 0$

   c. $y' = \dfrac{1}{y}\left(t + \dfrac{y^2}{t}\right)$

   d. $y^{(iv)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = xe^x$

2.* Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \tan t + y^2 \cos t - \dfrac{1}{\cos t} \\ y(0) = 5/3 \end{cases}$$

sapendo che una soluzione particolare dell'equazione differenziale é data da $\tilde{y}(x) = -\frac{1}{\cos t}$.

3. Indicata con f_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\cos x}{ny} \\ y(\pi/2) = 2 \end{cases}$$

si studi la convergenza uniforme di f_n.

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 9x^2y'' - 12xy' - 8y = 40x - 14x^2 \\ y(1) = a \\ y'(1) = b \end{cases}$$

a. Si stabilisca al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ l'esistenza e l'unicitá locale della soluzione $y_{a,b}$ e, quando possibile, la si determini.

b. Si determinino $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ in modo tale che $y_{a,b}$ possa essere definita su tutto $\mathbb{R}$.

c. Si determinino, al variare di $c \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} 9x^2y'' - 12xy' - 8y = 40x - 14x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = c \end{cases}$$

5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} + x^4\sqrt{y} = 0 \\ y(x_0) = a \end{cases}$$

a. Sia $x_0 \in (0, \infty)$ e $a \in (0, \infty)$ fissati: si verifichi che esiste sempre una soluzione locale del problema. Si determini esplicitamente la soluzione y_a locale per $x_0 = 1$;

b. Sia $a = 0$ e $x_0 \in (0, \infty)$: si stabilisca se esiste unica la soluzione locale.

c. Si verifichi che y_a puó essere estesa su tutto $(0, \infty)$.

6. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + e^t \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$$

a. Si determini l'integrale generale del sistema omogeno associato,

b. si determini l'integrale generale del sistema.

c. si determini la soluzione tale che $x(1) = y(1) = 1$.

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \tan t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$