

## Indice

<b>1</b>	<b>Successioni di funzioni</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Serie di funzioni</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Serie di potenze</b>	<b>9</b>

Solo alcuni degli esercizi hanno la risposta (scritta in piccolo in parentesi quadre).

Gli esercizi con “\*” sono piú difficili degli altri !

Gli esercizi indicati con “S” sono svolti in “*Esercizi svolti sulla convergenza puntuale e uniforme*” disponibile sulla pagina del corso.

---

## 1 Successioni di funzioni

1.<sup>S</sup> Data una successione  $\{a_n\}_{n>0}$  di numeri reali, si consideri la funzione  $f_n$ , definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} na_n x & \text{se } 0 < x \leq 1/n \\ a_n(2 - nx) & \text{se } 1/n < x < 2/n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di  $\{f_n\}$ .

2.<sup>S</sup> Data una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di numeri reali non negativi, si consideri la successione  $\{f_n\}$  definita da  $f_n(x) = x^n e^{-a_n x}$ . Si studino le convergenze puntuale e uniforme di  $\{f_n\}$  in  $[0, \infty)$  nei seguenti casi:

- $a_n = n$ ,
- $a_n = \sqrt{n}$ ,
- $a_n = n^2$ ,
- $a_n = 1/n$ .

3.<sup>S</sup> Data una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di numeri reali, si consideri la funzione  $f_n$  definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n(1 - nx) & \text{se } 0 \leq x < 1/n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si studi la convergenza puntuale di  $\{f_n\}$  e si stabilisca se la convergenza è uniforme in  $\mathbb{R}$  in ciascuno dei seguenti casi:

- $a_n = 1/n$ ;
- $\{a_n\}$  successione qualsiasi.

4.<sup>S</sup> Si studino le convergenze puntuale e uniforme in  $\mathbb{R}$  della successione  $\{f_n\}$ , definita da

$$f_n(x) = \arctan(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- 5.<sup>S</sup> Data una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di numeri reali positivi, si consideri la successione  $\{f_n\}$  definita da

$$f_n(x) = a_n x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di  $\{f_n\}$  in ciascuno dei seguenti casi:

- $a_n = n^\alpha$ , con  $\alpha$  reale positivo;
- $a_n = 1/\sqrt{n}$ .

- 6.<sup>S</sup> Data una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di numeri reali, si consideri la funzione  $f_n$  definita da

$$f_n(x) = a_n \mathbf{1}_{[n, n+1)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme della successione  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^+$ .

- 7.<sup>S</sup> Data la successione  $\{f_n\}$ , definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n(x+1)}{n+1} & \text{se } -1 < x < 1/n \\ \frac{n-nx+2}{n+1} & \text{se } 1/n \leq x < 1+2/n \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

se ne studino le convergenze puntuale e uniforme in  $\mathbb{R}$ .

- 8.<sup>S</sup> Data una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di numeri reali, si consideri la funzione  $f_n$  definita da

$$f_n(x) = e^{-(x-a_n)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di  $\{f_n\}$  nei seguenti casi:

- $a_n = (-1)^{n^2}$ ,
- $a_n = n$ ,
- $a_n = 1/n$ .

- 9.<sup>S</sup> Si consideri la funzione  $f_n$  definita da

$$f_n(x) = e^{-(x-1/n)^2} \cos\left(e^{(x-1/n)^2}\right).$$

- Si studi la convergenza puntuale di  $\{f_n\}$ . Si verifichi che  $\{f_n\}$  converge uniformemente in ogni compatto  $K$ .
- Si studi la convergenza uniforme di  $\{f_n\}$  in  $\mathbb{R}$ .

10. Sia

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si dimostri che  $\{f_n\}$  converge uniformemente in  $\mathbb{R}$  a una funzione  $f$  e che l'equazione

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

vale se  $x \neq 0$ , ma non se  $x = 0$ .

11. Si consideri

$$f_n(x) = x^{n-x/n} \quad \forall x \in (0, 1).$$

È vera la relazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx ?$$

[Si.]

12. Si calcolino i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^e (\log x)^n dx \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^3 (\log x)^n dx. \quad [0, \infty.]$$

13. Data la funzione

$$f_n(x) = e^{nx} |x|^{1/n} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

- si determini l'insieme  $E$  di convergenza semplice della successione  $\{f_n\}$  e si calcoli la funzione limite;
- si determinino i sottoinsiemi di  $E$  in cui la convergenza di  $\{f_n\}$  è uniforme.

[a.  $E = (-\infty, 0]$ ,  $f(x) = 0$ . b.  $(-\infty, a]$  con  $a < 0$  fissato.]

14. Si consideri

$$f_n(x) = \int_n^{nx} t^{1/3} e^{-t} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Si determini l'insieme  $E$  di convergenza puntuale della successione  $\{f_n\}$  e la funzione limite  $f$ .
- Si stabilisca se la convergenza è uniforme in  $E$ .

[a.  $E = [0, \infty)$ ,  $f(x) = c \mathbf{1}_{\{0\}}(x)$  con  $c$  costante negativa. b. No.]

15. Data la funzione

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n} x^{n-1}}{1+x^n} \quad \forall x \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

- si calcoli il  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  e si stabilisca in quali intervalli del tipo  $[0, a]$  la convergenza di  $\{f_n\}$  è uniforme;

- si stabilisca se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$ .

[a.  $f(x) = \infty \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$ ;  $0 < a < 1$  fissato. b. Sì.]

16. Siano  $a \in \mathbb{R}$  e  $f_{n,a}$  la funzione definita da

$$f_{n,a}(x) = n^a x (1-x^2)^n.$$

- Si determini l'insieme  $E_a$  di convergenza semplice di  $\{f_{n,a}\}_{n \in \mathbb{N}}$  e si calcoli la funzione limite;
- si stabilisca se la convergenza è uniforme in  $E_a$ .

[a.  $E_a = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  se  $a < 0$ ;  $E_a = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  se  $a \geq 0$ ;  $f(x) = 0$ . b. Sì per  $a < 0$ .]

17. Data la funzione

$$f_n(x) = \frac{(x-1)^n}{1+x^n} \arctan(n^{x-1})$$

- determinare l'insieme  $E$  di convergenza semplice della successione  $\{f_n\}$  e si calcoli la funzione limite;
- determinare i sottoinsiemi di  $E$  in cui la convergenza di  $\{f_n\}$  è uniforme.

18. Per ogni  $a$  in  $\mathbb{R}^+$  ed  $n$  in  $\mathbb{N}$ , si consideri la funzione

$$f_{n,a}(x) = \frac{n^a x^{n-3/2}}{1+x^n} \quad \forall x \in (0, 1).$$

- si determini l'insieme  $E$  in cui  $\{f_{n,a}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge semplicemente e si calcoli la funzione limite;

- b. si determinino i sottoinsiemi di  $E$  in cui la convergenza di  $\{f_{n,a}\}_{n \in \mathbb{N}}$  è uniforme;  
 c. si stabilisca per quali valori di  $a$  vale la relazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{n,a}(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,a}(x) \, dx$$

19. Per ogni intero positivo  $n$  si consideri la funzione  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$f_n(x) = n x e^{-\sqrt{n}x}.$$

- a. Si disegnino i grafici delle funzioni  $f_n$  e si studi la convergenza puntuale di  $\{f_n\}$  in  $[0, \infty)$ ;  
 b. in quali sottoinsiemi di  $[0, \infty)$  la convergenza di  $\{f_n\}$  è uniforme?  
 c. Si calcolino i limiti seguenti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\pi f_n(x) e^{-x^2} \, dx \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) e^{-x^2} \, dx.$$

20. Per ogni intero positivo  $n$  si consideri la funzione  $f_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$f_n(x) = \frac{(x+1)^n}{1+(x-1)^n}.$$

- a. Si determini l'insieme di convergenza puntuale della successione  $\{f_n\}$ .  
 b. Si studi la convergenza uniforme di  $\{f_n\}$ .

21. Per ogni intero positivo  $n$  si consideri la funzione  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{n+|x|} \log(n+|x|).$$

- a. Si determini l'insieme di convergenza puntuale della successione  $\{f_n\}$ .  
 b. Si studi la convergenza uniforme di  $\{f_n\}$ .

22. Sia  $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^n}{(x-1)^n + (x+1)^n}.$$

- a. Si studi la convergenza puntuale di  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .  
 b. Si studi la convergenza uniforme di  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

23. Sia  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2} \, dy.$$

Dopo aver verificato che le  $f_n$  sono continue, si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e di convergenza uniforme di  $\{f_n\}$ .

## 2 Serie di funzioni

- 1.<sup>S</sup> Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  come nell'Esercizio 1.1.1. Si studino le convergenze puntuale e uniforme della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  nei seguenti casi:
- a.  $a_n = 1/n^2$ ;

- b.  $a_n = 1/n$ ;
- c.  $a_n = (-1)^n/n$ .

2.<sup>S</sup> Sia  $f_n$  la funzione definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{n+1} \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x. \end{cases}$$

- a. Si determini l'insieme  $E$  di convergenza puntuale della serie  $\sum_n f_n$  e si mostri che la sua somma è continua in  $E$ ;
- b. si mostri che  $\sum f_n$  non converge uniformemente in  $E$ .

3.<sup>S</sup> Si studino le convergenze puntuale, assoluta e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}.$$

4.<sup>S</sup> Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n,$$

- a. si determini l'insieme dei punti dove converge;
- b. si stabilisca se la convergenza è uniforme in  $[0, \pi/4]$ ;
- c. si calcoli  $\int_0^{\pi/4} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n \right) dx$ .

5.<sup>S</sup> Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- a. Si determini l'insieme  $E \subset \mathbb{R}$  in cui essa converge puntualmente, e si indichi con  $f(x)$  la sua somma.
- b. Si verifichi che la serie converge uniformemente in  $[a, 2]$ , per ogni  $a \in (0, 1)$ .
- c. Si calcoli  $f(3/2)$  con un errore inferiore a  $10^{-2}$ .

6.<sup>S</sup> Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{x^{2n} + n^a} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+,$$

si stabilisca per quali valori di  $a$  essa

- a. converge puntualmente in  $|x| < 1$ ;
- b. converge puntualmente in  $|x| > 1$ ;
- c. converge puntualmente in  $\mathbb{R}$ ;
- d. converge uniformemente in  $[-1, 1]$ , dopo aver dimostrato che converge uniformemente in  $\mathbb{R}$  se  $a > 2$ .

7.<sup>S</sup> Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si determinino, in dipendenza del parametro reale  $\alpha$ ,

- a. l'insieme di convergenza puntuale;
- b.\* l'insieme di convergenza uniforme.
- c. Indicata con  $f(x)$  la somma della serie nell'insieme di convergenza puntuale, si calcoli, quando esiste, il valore del  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

8.<sup>S</sup> Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{(2 + \sin x)^{n^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- a. Si dimostri che essa converge semplicemente in  $\mathbb{R}$ ;
- b. si stabilisca se la convergenza è uniforme nell'intervallo  $[0, \pi]$ ;
- c.\* si stabilisca se la convergenza è uniforme nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

9. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n) x^n,$$

si determini l'insieme  $E$  sui cui si ha convergenza semplice. In quali sottoinsiemi di  $E$  la convergenza è uniforme?

10. Si determini l'insieme di convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + n}{n^2 x^4 + n^4 + 1},$$

e si stabilisca se la convergenza è ivi uniforme.

[ $\mathbb{R}$ ; si.]

11. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n + n^x},$$

con  $x$  opportunamente scelto.

- a. Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme per  $x \geq 0$ ;
- b.\* si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme nel dominio della serie di funzioni.

[a.  $[0, 1) \cup (1, \infty)$ ;  $[0, a] \cup [b, \infty)$  con  $0 < a < 1 < b$  fissati.]

12. Si studino le convergenze puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/n} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^n.$$

13. Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)^n} \quad \forall x \in [0, \infty) \quad \forall a \in \mathbb{R}^+,$$

- a. se ne determinino l'insieme  $E_a$  di convergenza semplice e la funzione somma;
- b. si descrivano i sottoinsiemi di  $E_a$  in cui la convergenza è uniforme.

[a.  $E_a = [0, \infty) \forall a > 0$ . b. Per  $a \in (0, 2]$  conv.unif. in  $[b, \infty)$  con  $0 < b$  fissato; per  $a > 2$  conv.unif. in  $E_a$ .]

14. Sia  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri reali distinti, con  $-\infty < a \leq x_n \leq b < \infty$ . Supponiamo che  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sia una successione di numeri reali tali che  $\sum |c_n| < \infty$ . Si dimostri che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x - x_n) \quad \forall x \in [a, b]$$

converge uniformemente in  $[a, b]$  e che la sua somma è continua in ogni punto di  $[a, b] \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$ .

15. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x}$$

nel suo insieme di definizione.

- Si studi la convergenza puntuale;
- su quali intervalli di  $\mathbb{R}^+$  la serie converge uniformemente?
- \* Su quali intervalli di  $\mathbb{R}$  la serie converge uniformemente?

[a.  $\mathbb{R} \setminus (\cup_{n=1}^{\infty} \{-1/n^2\})$ . b.  $[a, \infty)$  con  $0 < a$  fissato.]

16. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{x + e^{-nx}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

- se ne determini l'insieme  $E$  di convergenza semplice;
- si descrivano i sottoinsiemi di  $E$  in cui la convergenza è uniforme.

[a.  $E = (-\infty, 0]$ . b.  $(-\infty, 0]$ .]

17. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^a + n^a} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall a \in \mathbb{R}^+,$$

- se ne determini l'insieme  $E_a$  di convergenza semplice;
- si descrivano i sottoinsiemi di  $E_a$  in cui la convergenza è uniforme.

18. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}.$$

Si calcoli la somma della serie.

[Conv.punt. in  $E = (-\infty, -2) \cup [0, \infty)$ ; conv.unif. in  $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$  con  $a < -2$  e  $0 < b$  fissati.]

19. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}}$$

- se ne determini l'insieme di convergenza puntuale;
- si verifichi che si ha convergenza uniforme su ogni compatto.

[a.  $\mathbb{R}$ .]

20. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{nx^3}$$

- se ne determini l'insieme di convergenza puntuale e si calcoli la somma;

b. si stabilisca se su tale insieme la convergenza sia uniforme.

[a.  $(-\infty, 0]$ . b. No.]

21. Si studi la convergenza uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} \log \left( 1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}} \right).$$

[ $[-a, a]$  con  $0 < a < 1$  fissato.]

22. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x}$$

in  $\mathbb{R}^+$ .

23. Si consideri

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n \arctan x^{n^3}.$$

Si determini l'insieme di convergenza puntuale e l'insieme di convergenza uniforme della serie di funzioni.

24. Si determinino l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme delle serie seguenti:

a.  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$

b.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^{n+1}}{e^{nx^2}}$

c.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{x}{n^2} \right)$

d.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{(n-1)!}$

e.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$

f.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx^2}}$

g.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2}$

h.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \log \left( \frac{x^n}{n(n-1)^2} \right)$

i.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan(nx) \right)^n$

l.  $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(nx) - \arctan((n-1)x))$

m.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^x - 2)^n}{n + n^x}$

n.  $\sum_{n=1}^{\infty} (x+1)^n \log(1+n^x)$

o.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + n}{1+n^2}$

p.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 e^n + e^{-nx}}$

q.  $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{x/n} - 1) \sin(x/n)$

19. Si studino, al variare del parametro reale positivo  $a$ , le convergenze semplice e uniforme delle serie seguenti:

a.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^a + n^2}$

b.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^a}{x + n^2}$

c.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^a + n}$

d.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^2}{x+n} \right)^a$

e.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x^a + n)^a}$

### 3 Serie di potenze

1. Si mostri che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è di classe  $C^\infty(\mathbb{R})$  ma non è sviluppabile in serie di McLaurin.

2. Si determinino il raggio di convergenza, l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme delle seguenti serie:

$$\begin{array}{ll} a.S \sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^{-n} x^n & b.S \sum_{n=1}^{\infty} (\log(1+n))^{-1} x^n \\ c. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n & d. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n \\ e. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}}{n} x^n & f. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n \log n} x^n \\ g. \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^{n!} & h. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sqrt{2+n}}{n} x^{2n}. \end{array}$$

3. Si determini, in dipendenza dal parametro intero positivo  $k$ , il raggio di convergenza delle seguenti serie:

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^3} x^{n^k} \quad b. \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^{n^k}.$$

4. Si calcolino, con un errore inferiore a  $10^{-2}$ , i seguenti integrali:

$$\begin{array}{ll} a.S \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{x} dx & b. \int_0^{1/2} \frac{\arctan x - \sin x}{x} dx \\ c.S \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2x} dx & d. \int_0^{1/4} \frac{\log(1 + \sqrt{x}) - \sqrt{x}}{x} dx \\ e. \int_0^1 \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x} dx & f. \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx. \end{array}$$

5. Si determinino l'insieme di convergenza semplice, gli insiemi di convergenza uniforme e la somma delle seguenti serie:

$$\begin{array}{ll} a. \sum_{n=1}^{\infty} n x^n & b. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ c.S \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} & d. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{(n-1)!} \\ e.S \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(n-1)!} & f. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n n!} \\ g. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} & h. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-e)^n \\ i. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2x^2 - 3}{x^4 - 3x^2 + 1} \right)^n & l. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{(x^2 - 3x + 1)n} \\ m. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{(n-1)!(n+3)} & n. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2^n}{n!} x^n. \end{array}$$

6. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1+(-1)^n}{(n+1)!} x^n.$$

- Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;
- si calcoli la somma della serie e la si indichi con  $f(x)$ ;
- si calcoli, con un errore inferiore a  $10^{-3}$ , l'integrale

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

7. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n.$$

- Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;
- se ne calcoli la somma;
- si calcoli, con un errore inferiore a  $10^{-3}$ , l'integrale

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

8. Si calcoli, con un errore inferiore a  $10^{-2}$ , l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x - x}{x^3} dx.$$

9. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n+1)}{n^2} x^n.$$

- Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;
- se ne calcoli la somma e la si indichi con  $f(x)$ ;
- si calcoli, con un errore inferiore a  $10^{-3}$ , l'integrale

$$\int_0^{1/2} f(x) dx.$$

$$[\text{b. } f(x) = \frac{d}{dx} \left( x \int_0^x \frac{\log(1+t)-t}{t} dt \right).]$$

10. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)}{(2n)! 2n} x^{2n}.$$

- Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;
- si calcoli la somma della serie e la si indichi con  $f(x)$ ;
- si calcoli, con un errore inferiore a  $10^{-3}$ , l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{f(x)}{x} dx.$$

11. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+1)^2} x^n.$$

- a. Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;  
b. se ne calcoli la somma e la si indichi con  $f(x)$ ;  
c. si calcoli, con un errore inferiore a  $10^{-3}$ , l'integrale

$$\int_0^{1/2} f(x) dx.$$

$$[\text{b. } f(x) = x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\log(1+t)-t}{t} dt \right).]$$