Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano – Bicocca

Esercizi: integrali in piú variabili.

Versione del 16 dicembre 2019

Indice

Solo alcuni degli esercizi hanno la risposta (scritta in piccolo in parentesi quadre).
Gli esercizi con "*" sono piú difficili degli altri !

---

1 Integrali propri

1.1 Integrali doppi

1. Si calcoli
$$\int_A \frac{\cos y^2}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
in
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le y^2,\ 0 < y \le \sqrt{\pi/2}\right\}.$$
[1/2.]

2. Si calcoli
$$\int_D \frac{y^3}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
in
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 2y \le 4x,\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x}\right\}.$$
[45/32.]

3. Si calcoli
$$\lim_{a\to 0^+} \int_{D_a} \frac{x}{y(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
con
$$D_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{x^2}{2} \le y \le 2x^2,\ a \le \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{1}{a}\right\}.$$
[0.]

4. Si calcoli
$$\int_{B(\mathbf{0},1)} (x+y)\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
[0.]

5. Si calcoli l'area dell'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

[πab.]

6. Si calcoli

$$\int_D xy\cos(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

in

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \le y \le 2x,\ \frac{2}{x}\pi \le y \le \frac{3}{x}\pi,\ x > 0\right\}.$$

7. Si calcolino

$$\int_{\{|x|+|y|\le 1\}} e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \int_{\{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\le 1\}} xe^{|x|+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

[$e - 1/e,\ 0$.]

8. Si calcoli

$$\int_D \frac{x^2}{y} e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

in

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{2x} \le y \le \frac{1}{x},\ 2x^2 \le y \le 3x^2\right\}.$$

[$(e - \sqrt{e})/18$.]

9. Si calcoli

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{D_r} \frac{x+1}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

con

$$D_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \ge r^2,\ 0 \le x \le y^2,\ r \le y \le 1\right\}.$$

[$5/8$.]

10. Si calcoli

$$\int_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge x\right\}$.

[0.]

11. Si calcoli

$$\int_D \frac{xy}{x^2+2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + 2y^2 \le 9,\ x^2 + y^2 \ge 1,\ \sqrt{3}x < y < \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$.

[$18/35 - (\log(7/5))/4$.]

12. Si calcoli

$$\int_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 2\right\}$.

[$2\sin 1$.]

13. Si calcoli
$$\int_D \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
con $D = [-2,2]^2 \setminus \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 1\big\}$.

[$-8+4\pi+8\ln 2$.]

14. Si calcoli
$$\int_{B((1,0),1)\cap B((0,1),1)} \|(x,y)\|_2^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

[$4(8-5\sqrt{2})/9$.]

15. Si calcoli
$$\int_D x|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
con $D = \{(x,y) \in [-1,1]\times\mathbb{R} :\ x^3 \le |y| \le \sqrt[3]{|x|}\}$.

[$-1/8$.]

1.2 Integrali tripli

1. Si calcoli il volume della porzione di cilindro
$$C = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x-1)^2+(y-1)^2 \le 1\big\}$$
compresa tra i piani $z=0$ e $3x+7y-21z+11=0$.

[π.]

2. Si calcoli il volume del "toro" di raggio maggiore R e raggio minore r (con $0<r<R$), cioé del solido che si ottiene ruotando intorno all'asse z l'insieme
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x-R)^2+z^2 \le r^2,\ y=0\}.$$

[$2\pi^2r^2R$.]

3. Si calcoli il volume di una piramide retta a base quadrata con lato l e altezza h.

[$l^2h/3$.]

4. Si calcoli il volume di
$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 \le y \le 2,\ x \ge \frac{1}{2},\ 0 \le z \le |\log(xy)|\right\}.$$

[$(2\sqrt{2}+17/8)\log 2 - 8\sqrt{2}/3+3/4$.]

5. Si calcoli
$$\int_D \frac{1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
con
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0<y<1,\ 0<z<1,\ 0<x<y+z\}.$$

6. Si calcoli il volume di
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 4x^2+9(2-\sqrt{y^2+z^2})^2 \le 1\}.$$

[$2\pi^2/3$.]

7. Si calcoli

$$\int_{B(\mathbf{0},1)} \sqrt[3]{x+y+z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

[0.]

8. Si calcoli

$$\int_A x_3\cos(x_1+x_2+x_3)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3.$$

su $A = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\ \max\{|x_1|,\,|x_2|,\,|x_3|\}\le 1\}$.

[0.]

9. Si calcoli

$$\int_D y(x+e^x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

con

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2-z^2+1\ge 0,\ |y|\le 1-x^2\}.$$

[0.]

10. Si calcoli

$$\int_E \sqrt{|z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

con

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\le 0\}.$$

[$4\pi/21$.]

11. Si calcoli il volume dell'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}=1.$$

[$4\pi abc/3$.]

12. Si calcoli il volume del solido i cui punti (x,y,z) proiettati sul piano $z=0$ sono compresi nel parallelogramma di vertici $(2,1)$, $(6,-1)$, $(7,0)$ e $(3,2)$ e tali che $0\le z\le e^{x+2y}$.

[$2(e^7-e^4)$.]

13. Si calcoli il volume di

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ y>x^2,\ z>y^2,\ x>z^2\right\}.$$

[$1/7$.]

14. Si calcoli

$$\int_D (x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

ove

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+z\le 1\right\}.$$

[$1/12$.]

15. Sia $C\subset\mathbb{R}^3$ il cono retto con raggio di base 1 e altezza 2, avente nell'origine il centro del cerchio di base e l'altezza sull'asse z. Si calcoli il volume di C e

$$\int_C (|x|+|y|+|z|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

[$2\pi/3$, $(4+\pi)/3$.]

2 Integrali impropri

1. Si calcoli
$$\int_D \frac{e^x}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
con $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le e^{-|x|}\big\}$.

[$+\infty$.]

2. Si calcoli
$$\int_D \frac{1}{x}\log y\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
con $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < \sqrt{y} < x < 1\big\}$.

[-1.]

3. Al variare di $\alpha > 0$ si calcoli, se esiste,
$$\int_D y^\alpha\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
con $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |y|\sqrt{x} \le 1 \le x\big\}$.
[Esiste se $\alpha = n/m > 1$, con n e m primi tra loro e m dispari; se n dispari vale 0, se n pari vale $4/(\alpha^2-1)$.]

4. Stabilire se il solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse z dell'insieme
$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < z < |\log y|,\ 0 < y < 1\big\}$$
ha volume finito.

[$\pi/2$.]

5. Si consideri, per ogni $\alpha \ge 0$, l'insieme
$$\Omega_\alpha = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : (x^2+y^2) < e^{\alpha t},\ t \ge 0\}.$$
Si determinino gli α per cui
$$\int_{\Omega_\alpha} \frac{x^2+t^2}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t < \infty.$$

[$\nexists\alpha$.]

6. Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ definito da
$$T = \{(x,y,z) :\ z \ge 0,\ z\sqrt{x^2+y^2} \le 1\}.$$
Si disegni l'insieme T e si stabilisca se il seguente integrale esiste finito
$$\int_T \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} - \sqrt{x^2+y^2}\,e^{-z^2}}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

[Si.]

7. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito
$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha(e^z+e^{-z})}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

[$\alpha > 1$.]

8. Si stabilisca se esiste finito e, in caso affermativo lo si calcoli,
$$\int_{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le z^4\}} \frac{|z|^3}{\sqrt{x^2+y^2}(1+x^2+y^2+z^4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

[$\sqrt{2}\pi^2/4$.]

3 Esercizi vari

1. Sia
$$f(x,y) = \frac{y}{1+\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$$
Si calcolino, quando esistono,

   a. $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{B(\mathbf{0},r)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

   b. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

   c. $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{B((0,r),2r)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

   [a. 0; b. 0; c. 0.]

2.* Si calcoli
$$\lim_{r\to+\infty} e^{-r}\int_{B(\mathbf{0},r)} e^{|x|+|y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

   [$+\infty$.]

3.* Si provi che
$$\lim_{r\to+\infty}\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{1}{1+x^2+|y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \infty$$

4. Si calcoli
$$\int_A xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
con $A = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ x+y+z\ge 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\big\}$.

   [7/360.]

5. Sia $T\subset\mathbb{R}^3$ il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

   a. Si determini il volume di T;

   b. si calcoli, al variare di $\alpha\ge 0$
$$\int_T (1-x-y-z)^\alpha\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

   c.* si determini per quali valori di α, con $\alpha>1$, esiste finito
$$\int_T \frac{1}{(1-x-y)(1-x^2-y^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

   [b. $1/[(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)]$; c. $1<\alpha<2$.]

6. Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} -n^\alpha & \text{se } (x,y)\in B(\mathbf{0},n)\setminus B(\mathbf{0},n-1) \text{ con } n \text{ pari}\\ n^\alpha & \text{se } (x,y)\in B(\mathbf{0},n)\setminus B(\mathbf{0},n-1) \text{ con } n \text{ dispari}\end{cases}$$
Si determini α reale tale che
$$\lim_{n\to\infty}\int_{B(\mathbf{0},n)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
esista finito.

   [$\alpha<-1$.]

7. Per ogni α positivo si consideri la regione

$$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y \geq 0, \ x \leq y^\alpha, \ y \geq 0\}.$$

Si determinino gli α per i quali esiste finito

$$\int_{D_\alpha} y e^{-y^2+x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

[$0 < \alpha < 2$.]

8. Per ogni $\alpha > 0$ sia

$$\int_{\Omega_\alpha} \frac{y^3 e^{\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}}{z} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

dove

$$\Omega_\alpha = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)^{-\alpha}\right\}.$$

Determinare i valori di α per i quali l'integrale esiste finito e, per questi valori, calcolarlo.

[$\exists$ se e solo se $\alpha > 2$ e vale 0.]

9. Si calcoli

$$\lim_{R \to \infty} \int_{D_R} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

ove $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt[3]{|x|} + \sqrt[3]{|y|} \leq R\}$.

[∞.]

10.* Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^4 + |y|^3}.$$

a. Si provi che

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 0;$$

b. si provi che

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

non esiste.

11. Si calcoli

$$\lim_{a \to 0^+} \int_{D_a} \frac{|x|}{y(1 + y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

con

$$D_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{2} \leq y \leq 2x^2, \ a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{a}\right\}.$$

[$(3\pi)/4$.]

12. Al variare di $\alpha > 0$ si stabilisca se esiste finito

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

ove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 < x < 2y^2, \ -1 < y < 1\}$. In particolare, lo si calcoli per $\alpha = 1$.

[$\alpha < 5/2, \ \log(5/2) + \arctan 2 - \pi/2$.]

13. Al variare di α, quando é integrabile $f(x,y) = \dfrac{y^\alpha \log^3 y}{x^2 y + 1}$ in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > x > 0\}$?

[$-2 < \alpha < -1/2$.]

14. Si verifichi che $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{(y^2+z^2)^2}$ é integrabile in

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y < x^2 + y^2 < x < z\}$$

e si calcoli

$$\int_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

[$-1/32$.]

15*. Si stabilisca se

$$f(x,y,z) = \frac{x}{\left(z + \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \sqrt{x^2+y^2}}$$

é integrabile in $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x < x^2+y^2 < y, \ z^2 < x^2 < 3y^2\}$. In caso affermativo si calcoli

$$\int_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

16. Si stabilisca, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrabilitá di

$$f_\alpha(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,(x^2+y^2+z^2-1)^\alpha}$$

in $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \|(x,y,z)\| > 1, \ z < 0\}$. Si calcoli poi

$$\int_D f_{1/2}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

[$\alpha \in (0,1), \ \pi^2$.]

17. Siano R e h positivi e fissati.

   a. Si calcoli il volume del cono

$$C_{R,h} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \le \left(\frac{Rz}{h}\right)^2, \ 0 \le z \le h\right\}.$$

   b. Si stabilisca, al variare di α intero, quando esiste finito

$$\lim_{h\to\infty} \int_{C_{R,h}} x^\alpha\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

[a. $\pi R^2 h/3$.]

18. Si stabilisca, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quando esiste finito

$$\int_D (x^2+y^2)^{\alpha/2} \log[z^2(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

ove

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le z \le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1\right\}.$$

[$\alpha < -1$.]

19. Si stabilisca, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quando esiste finito

$$\int_D z^\alpha\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

ove

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y > x^2, \ z > y^2, \ x > z^2\right\}.$$

[$\alpha > -7/4$.]

20. Sia
$$f_\alpha(x,y,z) = \frac{(xy+yz+xz)^\alpha}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}\left(\log^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1\right)}.$$

a. Si stabilisca, al variare di $\alpha > 0$, quando esiste finito
$$\int_{\mathbb{R}^3} f_\alpha(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z;$$

b. si calcoli
$$\int_{\mathbb{R}^3_+\setminus B(\mathbf{0},1)} f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

[a. $\alpha = 1$; b. $\pi/2$.]

21*. Dopo aver verificato che esiste finito
$$\int_D \frac{y}{(z+1)\sqrt[4]{(x^2+y^2)^5}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
ove $D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ xy>0,\ 0<z<\sqrt{1+x^2+y^2},\ \sqrt{x^2+y^2}<z+1\right\}$, lo si calcoli.

[0.]

22. Sia $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x>0,\ y>\max(\sqrt{x},x^2)\right\}$. Si verifichi che
$$\int_D \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}.$$

23. Sia $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2\le y\le 1\right\}\setminus B_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{0},1)$ e α reale fissato, $\alpha\neq 2$.

a. Si determinino i valori di α per cui
$$\int_D x^\alpha\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
è definito ed esiste finito;

b. si calcoli il precedente integrale nei casi $\alpha = -\frac{17}{13}$ e $\alpha = 0$.

[a. $\{\alpha=-m/n :\ \alpha>-3,\ \alpha\neq -2,\ m,n\in\mathbb{N}$ con m pari se n dispari$\}\cup[0,\infty)$; b. 0, $4/3-\pi/4$.]