

Esercizi: equazioni differenziali e sistemi di equazioni differenziali.

Versione del 23 gennaio 2020

Indice

1	Equazioni differenziali del primo ordine	1
1.1	Equazioni a variabili separabili	1
1.2	Equazioni lineari	2
1.3	Equazioni di Bernoulli	3
1.4	Equazioni di Riccati	3
1.5	Equazioni omogenee	4
1.6	Esercizi vari	4
2	Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine	9
2.1	Lineari a coefficienti costanti	9
2.1.1	Omogenei	9
2.1.2	Non omogenei	11
2.2	Esercizi vari	12
3	Equazioni differenziali di ordine superiore al primo	12
3.1	Lineari a coefficienti costanti	12
3.1.1	Metodo di verosimiglianza	12
3.1.2	Con metodo di variazione delle costanti arbitrarie	14
3.2	Lineari a coefficienti non costanti	14
3.2.1	Equazioni di Eulero I	14
3.2.2	Equazioni di Eulero II (con metodo di variazione delle costanti arbitrarie)	15
3.3	Esercizi vari	15

Solo alcuni degli esercizi hanno la risposta (scritta in piccolo in parentesi quadre).

Gli esercizi con “*” sono piú difficili degli altri !

1 Equazioni differenziali del primo ordine

1.1 Equazioni a variabili separabili

1. Si integrino le seguenti equazioni

- | | | |
|----|--|--|
| a. | $ye^{2x} - (1 + e^{2x})y' = 0$ | $[y(x) = c\sqrt{1 + e^{2x}}, c \in \mathbb{R}.]$ |
| b. | $\tan x \sin^2 y + y' \cos^2 x \cot y = 0$ | $[\cot^2 y(x) = c + \tan^2 x, c \in \mathbb{R}.]$ |
| c. | $xy' - y = y^3$ | $[y = 0, x(y) = \frac{cy}{\sqrt{1+y^2}}, c \in \mathbb{R}.]$ |
| d. | $y - xy' = a(1 + x^2y'), a \in \mathbb{R}$ | $[y(x) = \frac{a+cx}{1+ax}, c \in \mathbb{R}.]$ |
| e. | $3e^x \tan y + (1 - e^x)y' \sec^2 y = 0$ | $[y(x) = \arctan(c(1 - e^x)^3), c \in \mathbb{R}.]$ |
| f. | $y' \tan x = y$ | $[y(x) = c \sin x, c \in \mathbb{R}.]$ |

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicità della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

- | | | |
|----|--|--|
| a. | $\begin{cases} (1 + e^x)yy' = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ | $[y(x) = \sqrt{1 + \log(\frac{1+e^x}{2})^2}.]$ |
|----|--|--|

- b. $\begin{cases} (xy^2 + x) + (x^2y - y)y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $[y(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}.]$
- c. $\begin{cases} y' \sin x = y \log y \\ y(\pi/2) = 1 \end{cases}$ $[y(x) = 1.]$
- d. $\begin{cases} y' + 2xy = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ $[y(x) = -e^{-x^2}.]$
- e. $\begin{cases} y' = \frac{xy}{y-1} \\ y(0) = e \end{cases}$ $[y(x) - \log y(x) = 1/2x^2 + e - 1.]$
- f. $\begin{cases} y' = (y^2 - y) \log(2+x) \\ y(-1) = 1/2 \end{cases}$ $[y(x) = \frac{e^{x+1}}{(x+2)^{x+2} + e^{x+1}}.]$

3. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si provi che ammette infinite soluzioni definite su tutto \mathbb{R} .

4. Si determini $y_0 \in \mathbb{R}$ tale che il problema

$$\begin{cases} y' = \frac{5}{2}ty^{1/5} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

abbia soluzione locale, ma non unica: si scrivano almeno 3 soluzioni.

5. Si determinino tutte le soluzioni locali dei seguenti problemi di Cauchy

$$a. \begin{cases} y'(x^2 - 1) = 2xy \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad b. \begin{cases} y'(x^2 - 1) = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad c. \begin{cases} y'(x^2 - 1) = 2xy \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

1.2 Equazioni lineari

1. Si integrino le seguenti equazioni

- a. $xy' - y - x^3 = 0$ $[y(x) = (\frac{1}{2}x^2 + c)x, c \in \mathbb{R}.]$
- b. $y' = \frac{y}{x+1} + e^x(x+1)$ $[y(x) = (e^x + c)(x+1), c \in \mathbb{R}.]$
- c. $y' = -y \cot x + 2 \cos x$
- d. $y' = y \tan x + \sin x$
- e. $y' = \frac{2y}{x} + \frac{x+1}{x}$

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicità della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

- a. $\begin{cases} y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $[y(x) = \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.]$
- b. $\begin{cases} xy' + y - e^x = 0 \\ y(a) = b \end{cases}$ $\text{con } a \neq 0$
- c. $\begin{cases} y' = -\frac{2x}{1+x^2}y + \frac{1}{x(1+x^2)} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$ $[y(x) = \frac{\log(-x)}{1+x^2}.]$
- d. $\begin{cases} y' + 3x^2y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $[y(x) = (1 + 2e^{-x^3})/3.]$

3. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' + 2\alpha \frac{y}{x} = x^\alpha \log x$$

verificano la relazione

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = 0. \quad [-1/2 < \alpha < 0.]$$

1.3 Equazioni di Bernoulli

1. Si integrino le seguenti equazioni

a. $y' + 2y \sin x = \frac{\sin x}{y^2}$ $[y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + ce^{6 \cos x}}, c \in \mathbb{R}.]$

b. $y' = -\frac{y}{6x} + \frac{x}{2y^5}$

c. $y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$ $[y(x) = 0 \text{ e } y(x) = x^4 \left(\frac{1}{2} \log |x| + c\right)^2, c \in \mathbb{R}.]$

d. $y' - y + y^2(t^2 + t + 1) = 0$

e. $y' - 2y = 2(e^t + t)\sqrt{y}$ $[y(x) = 0 \text{ e } y(x) = (ce^t + te^t - t - 1)^2, c \in \mathbb{R}.]$

f. $yy' - y^2 = 3t$

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicità della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

a. $\begin{cases} (x^2 + x)y' + 3(2x + 1)y = 3x\sqrt{x+1}y^{2/3} \\ y(2/3) = 0 \end{cases}$ $[y(x) = \left(\frac{2(1+x)^{3/2}}{5x} - \frac{2(1+x)^{1/2}}{3x}\right)^3.]$

b. $\begin{cases} (e^t + t^2)y' + (2e^t + 1)y = \sqrt[3]{t+1}y^4 \\ y(-3) = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y' - \frac{y}{t} - y^3 \sin t = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$ $[y(t) = \left(2 \cos t - 4 \frac{\sin t}{t} - 4 \frac{\cos t}{t^2} + \frac{3\pi^2 - 4}{t^2}\right)^{-1/2}.]$

d. $\begin{cases} y' = 4y + 2e^t \sqrt{y} \\ y(0) = 4 \end{cases}$ $[y(t) = (3e^{2t} - e^t)^2.]$

1.4 Equazioni di Riccati

1. Si integrino le seguenti equazioni

a. $y' = y^2 - ty + 1$ (si noti che esiste un polinomio del primo ordine che è soluzione)

b. $(1 + x^2)y' - (1 + 2x)y + y^2 = 1 - x$

$[a. y(t) = t + \frac{e^{t^2/2}}{c - \int_0^t e^{s^2/2} ds}$ con $c \neq 0$ e $y(t) = t$; $b. y(x) = x + \frac{1}{1 + ce^{-\arctan x}}$ con $c \in \mathbb{R}$ e $y(x) = x.]$

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicità della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

a. $\begin{cases} x' = (t-1)x^2 + (1-2t)x + t \\ x(0) = 2 \end{cases}$ $[x(t) = \frac{e^t + t + 1}{e^t + t}.]$

b. $\begin{cases} y' + 2e^t y - y^2 = e^{2t} + e^t \\ y(0) = 2 \end{cases}$ (e^t è una soluzione dell'equazione differenziale) $[y(t) = e^t + \frac{1}{1-t}.]$

1.5 Equazioni omogenee

1. Si integrino le seguenti equazioni

$$\text{a. } y' = e^{y/x} + \frac{y}{x} \quad [y(x) = -x \log \log \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R}.]$$

$$\text{b. } y' = -\frac{x+y}{x} \quad [y(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}, c \in \mathbb{R}.]$$

$$\text{c. } xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y \quad [y(x) = \frac{c}{2}x^2 - \frac{1}{2c}, c \in \mathbb{R}.]$$

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicità della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

$$\text{a. } \begin{cases} x^2 - 3y^2 = -2xyy' \\ y(2) = 1 \end{cases} \quad [y(x) = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}.]$$

$$\text{b. } \begin{cases} y' = \frac{t}{y} + \frac{2y}{t} \\ y(1) = -2 \end{cases} \quad [y(t) = -t\sqrt{5t^2 - 1}.]$$

$$\text{c. } \begin{cases} y' = \frac{t^2 + ty + y^2}{t^2} \\ y(1) = -1 \end{cases} \quad [y(t) = t \tan(\log t - \pi/4).]$$

1.6 Esercizi vari

1. Si integrino le seguenti equazioni

$$\text{a. } x' = -1 - 2x + x^2$$

$$\text{b. } x(1 + y^2)y' = 3$$

2. Si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione locale del seguente problema di Cauchy e la si determini:

$$\begin{cases} (y' - 5y)(1 + e^{-5x})^2 = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

3. Si consideri il problema

$$\begin{cases} (x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Si tracci un grafico qualitativo locale della soluzione e si scriva il polinomio di Taylor $P_2(x)$ del secondo ordine centrato in 1.

$$[P_2(x) = 2 + 8(x-1) - 6(x-1)^2.]$$

4. Si risolva

$$\begin{cases} 2xy^2 - y + xy' = 0 \\ y(2) = 2/5 \end{cases} \quad [y(x) = \frac{x}{x^2+1}.]$$

5. Sia $a > 0$. Si consideri

$$\begin{cases} y' = \frac{e^{-y}}{x(x-1)} \\ y(2) = \log a \end{cases}$$

Determinare la soluzione e il più ampio intervallo di definizione della soluzione.

$$[y(x) = \log\left(a + \log \frac{2(x-1)}{x}\right).]$$

6. Si determini la soluzione massimale del problema

$$\begin{cases} y' = e^{y/x} + \frac{y}{x} \\ y(2) = 0 \end{cases} \quad [y(x) = -x \log\left(1 - \log \frac{x}{2}\right), x \in (0, 2e).]$$

7. Si consideri

$$\begin{cases} y' - 8x^5y + 4x^3y^2 = 2x(1 - 2x^6) \\ y(0) = a \end{cases}$$

- a. si verifichi che l'equazione differenziale ha una soluzione tra i polinomi del secondo ordine;
 b. si determini la soluzione al variare di $a \in \mathbb{R}$ e il relativo intervallo massimo di definizione.

8. Si determini, per ogni $a \in \mathbb{R}$, la soluzione locale del problema

$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2 + 1 \\ y(0) = a \end{cases}$$

Si determini a tale che la soluzione possa essere definita su tutto \mathbb{R} .

$$[a = 0, y(x) = x.]$$

9. Si consideri

$$(1 + x^2)y' + 6xy - 3y^{2/3}(1 + x^2) \log(3 + x^2) = 0.$$

- a. Si determini l'integrale generale;
 b. si provi che per ogni $y_0 \neq 0$ e per ogni x_0 esiste unica la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1 + x^2)y' + 6xy - 3y^{2/3}(1 + x^2) \log(3 + x^2) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- c.* si provi che per $y_0 = 0$ e per ogni x_0 esistono più soluzioni locali del precedente problema di Cauchy. Si usi questo risultato per provare che ogni (x_0, y_0) il problema di Cauchy ha infinite soluzioni.

$$[a. y(x) = 0 \text{ e } y(x) = \left(\frac{3x(3+x^2) \log(3+x^2) - 2x^3 + c}{9(x^2+1)} \right)^3.]$$

10. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y' + y^2 - 1 = 0 \\ y(2) = k \end{cases}$$

- a. si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale;
 b. si determini $k \in \mathbb{R}$ tale che la corrispondente soluzione del problema di Cauchy sia definita su tutto $(0, \infty)$.

$$[b. -\frac{e+1}{e-1} \leq k \leq 1.]$$

11. Si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione locale del seguente problema di Cauchy e lo si risolva:

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{(x+1)^2} = x^2y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Si stabilisca se la soluzione è definita su tutto \mathbb{R} .

$$[y(x) = e^{\frac{1}{x+1}} \left(e - \int_0^x s^2 e^{\frac{1}{s+1}} ds \right)^{-1}, \text{ no.}]$$

12. Si verifichi che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'' + 2y' = e^{x^2} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = \frac{e-1}{2} \end{cases}$$

ha una sola soluzione definita su tutto \mathbb{R} .

$$[y(x) = \int_1^x \frac{e^{s^2} - 1}{2s^2} ds.]$$

13. Sia f_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = n(t - y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sia f il limite puntuale di f_n . Si stabilisca se f_n converge uniformemente a f in $[0, \infty)$.

[Si.]

14. Sia f_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 t \\ y(1) = \sqrt[n]{2} \end{cases}$$

Si studi la convergenza uniforme di f_n .

15. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(2 - y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

16. Sia

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{x+1}y - \frac{1}{x^2-1}\sqrt{y} = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a. Si provi che per $y_0 > 0$ fissato esiste unica la soluzione locale del problema e la si determini; è possibile definirla su tutto $(-1, 1)$?

b.* Per $y_0 = 0$ si determinino almeno 3 soluzioni definite in $(-1, 1)$.

$$[a. \text{ Sol. locale: } y(x) = \left(\frac{\sqrt{y_0 + \log \sqrt{1-x}}}{x+1}\right)^2.]$$

17. Sia

$$\begin{cases} y' + \left(y^2 + y - \frac{3}{4}\right) \cos x = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Si determini $y_0 \in \mathbb{R}$ tale la soluzione del problema sia definita su tutto \mathbb{R} .

$$[\frac{2y_0-1}{2y_0+3} \notin [e^{-2}, e^2].]$$

18. Sia $a \in \mathbb{R}$. Si determini la soluzione definita nel più ampio intervallo del problema

$$\begin{cases} xy' = y(\log y + 1 - \log x) \\ y(1) = e^a \end{cases}$$

$$[y(x) = xe^{ax} \text{ in } (0, \infty).]$$

19. Sia $a > 1$ e si consideri

$$\begin{cases} x^2 y' = y^3 - y \\ y(2) = a \end{cases}$$

a. Si provi che esiste unica la soluzione locale y_a e la si determini.

b. Si provi che esiste $\alpha > 1$ tale che per ogni $a \in (1, \alpha]$ la soluzione y_a può essere definita su tutto $(0, \infty)$.

c. Quali soluzioni y_a possono essere estese su tutto \mathbb{R} ?

$$[b. \alpha = \sqrt{\frac{e}{e-1}}.]$$

20. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y'' \cos^3 x + y' \cos^2 x \sin x = 6 \sin x - 4 \cos^2 x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

- a. Si provi che esiste unica la soluzione locale e la si determini.
 b. Si determini l'intervallo massimale di definizione.

[b. $(-\pi/2, \pi/2)$.]

21. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = e^x \sqrt[3]{1-y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- a. Si studi l'esistenza e l'unicità di soluzioni locali al variare di (x_0, y_0) .
 b. Si determinino tutte le soluzioni definite su tutto \mathbb{R} nel caso $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

$$[b. y(x) = 1, y(x) = \begin{cases} 1 + [2(e^2 - e^x)/3]^{3/2} & \text{se } x \leq 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}]$$

22. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' - 2y = 2(e^x + x)\sqrt{y} \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

- a. Si studi l'esistenza e l'unicità di soluzioni locali;
 b.* per $x_0 = 0$, si determinino tutte le soluzioni definite su tutto \mathbb{R} .

$$[b. \text{ Per ogni } \alpha \text{ sia } g_\alpha(x) = [(\alpha + 1 - \alpha e^\alpha)e^{x-\alpha} + xe^x - x - 1]^2 \text{ e } \beta \text{ tale che } e^\beta + \beta = 0. \text{ Sono soluzioni} \\ y_\alpha(x) = \begin{cases} g_\alpha(x) & \text{se } x \geq \alpha \\ 0 & \text{se } x < \alpha \end{cases} \text{ per } \alpha \geq 0, \quad y_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq \alpha \\ g_\alpha(x) & \text{se } x < \alpha \end{cases} \text{ per } \alpha \leq \beta, \quad y(x) = 0.]$$

23. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{t}y + 4t^2\sqrt{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Si determinino tutte le soluzioni locali del problema.

$$[y(x) = 0 \text{ e } \forall \alpha \geq 1 \ y_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \alpha \\ (t(t^2 - \alpha^2))^2 & \text{se } x > \alpha \end{cases}.]$$

24. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Si determinino le 4 soluzioni locali del problema.

25. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x + y + 3) \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

$$[y(x) = -2 \arctan\left(1 + \frac{2}{x-2}\right) - x - 3.]$$

26. Si determinino tutte le soluzioni definite su tutto \mathbb{R} del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 5y^{4/5} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

27. Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 - xy}{1 + x^2} \\ y(1) = a \end{cases}$$

ha un massimo o un minimo relativo in $x = 1$.

[$a = 1$ massimo relativo, $a = 0$ massimo e minimo relativo.]

28. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1+2x}{\cos y} \\ y(0) = \pi \end{cases}$$

nel suo intervallo massimo di definizione.

$$[y(x) = \pi - \arcsin(x+x^2) \text{ in } ((-1-\sqrt{5})/2, (-1+\sqrt{5})/2).]$$

29.* Si determini il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- per $(x_0, y_0) = (0, 1/2)$, si determinino tutte le soluzioni nel loro intervallo massimo di definizione e ne si tracci un grafico accurato;
- per $(x_0, y_0) = (0, 1)$ e per $(x_0, y_0) = (1/2, -1)$, si determinino tutte le soluzioni nel loro intervallo massimo di definizione;
- si determinino i punti (x_0, y_0) tale che l'unica soluzione del problema di Cauchy sia $C^\infty(-1, 1)$.

$$[a. y(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in (-1, \sqrt{3}/2) \\ 1 & \text{se } x \in [\sqrt{3}/2, 1) \end{cases}; c. x_0 = y_0 \in (-1, 1).]$$

30. Per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-1)(y-4) \frac{\cos x}{\sin x} \\ y(3\pi/2) = 5 \end{cases}$$

- si determini la soluzione locale del problema;
- si determinino tutte le soluzioni definite su \mathbb{R} .

$$[a. y(x) = \frac{16-|\sin x|^3}{4-|\sin x|^3}.]$$

31. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si studi l'esistenza e l'unicità di soluzioni in $C^1(\mathbb{R})$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^3 y' = y - 1 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

[se $\alpha \neq 1$ non ci sono soluzioni, se $\alpha = 1$ ce ne sono infinite.]

32. Si stabilisca per quali α non negativi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy + y^3 = 0 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

è definita su tutto \mathbb{R} .

$$[\alpha \in [0, \pi^{-1/4}].]$$

33. Per ogni $\alpha > 0$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4y - 4\sqrt[4]{y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

- verificare che ammette un'unica soluzione locale e determinarla esplicitamente: individuare l'intervallo massimale di definizione della soluzione;
- è possibile prolungare la soluzione a tutto su \mathbb{R} ? In quanti modi?
- Si consideri ora il caso $\alpha = 0$; quante soluzioni locali ammette il problema di Cauchy?

$$[a. y(x) = ((\alpha^{3/4} - 1)e^{3x} + 1)^{4/3}; b. sempre in modo unico; c. infinite.]$$

34. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y' + 2\sqrt{y'}e^{x/2} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Si verifichi che ammette un'unica soluzione locale e determinarla esplicitamente: si stabilisca se é possibile prolungare la soluzione su tutto \mathbb{R} e si determinino tutti i modi possibili.

$$[Una\ sola\ soluzione\ definita\ su\ tutto\ \mathbb{R},\ y(x) = \begin{cases} 2/e - 1 & se\ x \leq -1 \\ e^x(x^2 + 1) - 1 & se\ x > -1 \end{cases}]$$

2 Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine

1. Si considerino

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-(1/2)t^2+t} \\ -e^{-(1/2)t^2+t} \end{pmatrix} \quad e \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(1/2)t^2+t} + e^{-(1/2)t^2+t} \\ -e^{-(1/2)t^2+t} + e^{(1/2)t^2+t} \end{pmatrix}$$

Esiste un sistema lineare omogeneo avente come soluzioni particolari \mathbf{x} e $\tilde{\mathbf{x}}$? Se si, lo si scriva.

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + tx_2(t) \\ x_2'(t) = tx_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

2. Siano

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix}$$

soluzioni dell'omogenea del sistema $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)$. Si determini $\mathbf{A}(x)$.

2.1 Lineari a coefficienti costanti

1. Si calcolino le matrici $e^{\mathbf{A}}$ con

a. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.1.1 Omogenei

1. Si integrino i seguenti sistemi di equazione differenziali

a. $\begin{cases} x' = x \\ y' = 3x - 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = c_1 e^t \\ y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \end{cases}$

b. $\begin{cases} x' = -4y \\ y' = x \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t \\ y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \end{cases}$

c. $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = 2c_1 e^t + c_2 e^t(2t + 1) \\ y(t) = c_1 e^t + c_2 e^t t \end{cases}$

d. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^t \\ y(t) = c_1 e^{3t} - c_2 e^t \end{cases}$

e. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ y(t) = c_1 \cos t - c_2 \sin t \end{bmatrix}$

f. $\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$

g. $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = x - y \end{cases}$

h. $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = x + 2y \end{cases}$

i. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

l. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

2. Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

a. $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = -2y \\ x(0) = 0 \quad y(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x(t) = 3te^{-2t} \\ y(t) = e^{-2t} \end{bmatrix}$

3. Si integrino i seguenti sistemi di equazione differenziali

a. $\begin{cases} x' = x + 3y - 2z \\ y' = 2y + 4z \\ z' = y + 2z \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x(t) = \frac{2}{3}c_3e^{4t} - 4c_2 + c_1e^t \\ y(t) = c_2 + c_3e^{4t} \\ z(t) = \frac{1}{2}c_3e^{4t} - \frac{1}{2}c_2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x + 2y + z \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x(t) = c_3e^t \\ y(t) = \frac{1}{2}e^t(2c_1 \cos(2t) + 2c_2 \sin(2t) - 3c_3 \cos(2t) - 3c_3) \\ z(t) = \frac{1}{2}e^t(2c_1 \sin(2t) - 2c_2 \cos(2t) - 3c_3 \sin(2t) + 2c_3) \end{bmatrix}$

c. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = y + z \\ z' = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x(t) = c_2e^t + c_1 \\ y(t) = -c_3 + c_2e^t \\ z(t) = c_3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{cases} x' = -3x \\ y' = 3y - 2z \\ z' = y + z \end{cases}$

4. Si risolvano i problemi di Cauchy $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, dove

a. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} x(t) = 2te^t \\ y(t) = e^t \\ z(t) = 0 \end{bmatrix}$

d. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 6 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} x(t) = e^{2t} - e^{3t} \\ y(t) = 4e^{2t} - 3e^{3t} \\ z(t) = e^{3t} - e^{2t} \end{bmatrix}$

e. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2.1.2 Non omogenei

A volte può essere utile riscrivere il sistema come un'equazione differenziale di ordine n e usare il metodo di variazione delle costanti arbitrarie

1. Si integrino i seguenti sistemi di equazione differenziali

$$\text{a. } \begin{cases} x' = 3x - 2y + e^t \\ y' = 2x - 2y \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - \frac{3}{2} e^t \\ y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - e^t \end{array} \right]$$

$$\text{b. } \begin{cases} x' = 3x + t \\ y' = y + 1 \\ z' = y + z \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x(t) = c_1 e^{3t} - \frac{1}{9} - \frac{t}{3} \\ y(t) = c_2 e^t - 1 \\ z(t) = c_2 t e^t + c_3 e^t + 1 \end{array} \right]$$

$$\text{c. } \begin{cases} x' = 2x + y + t \\ y' = x + 2y + t^2 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -3x - y - \frac{1}{1 + e^{4t}} \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} x' = 3x + y - e^{2t} \\ y' = 2x + 2y - e^{2t} \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^t + \frac{1}{2} e^{2t} \\ y(t) = c_1 e^{4t} - 2c_2 e^t + \frac{1}{2} e^{2t} \end{array} \right]$$

$$\text{f. } \begin{cases} x' = 2x + y - e^{-2t} + 1 \\ y' = 4x - 2y - e^{-2t} + 3 \end{cases}$$

$$\text{g. } \begin{cases} x'_1 = x_2 + t + 1 \\ x'_2 = -x_1 + 2x_2 - 2 \end{cases}$$

$$\text{h. } \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 1 \\ x'_2 = 2x_2 - x_3 - 1 \\ x'_3 = 2x_3 \end{cases}$$

2.* Si risolva

$$\begin{cases} tx' = 2x + y + t \\ ty' = x + 2y - t \\ x(e) = e \\ y(e) = -e \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x(t) = t \log t \\ y(t) = -t \log t \end{array} \right]$$

3. Siano

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Si risolva il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$ nei casi in cui

$$\text{a. } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{b. } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{c. } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

4. Si risolvano

$$\text{a. } \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x - y + \frac{1}{\sin t} \\ x(\pi/2) = 0 \\ y(\pi/2) = \pi \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x(t) = -\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \cos t + \sin t \log(\sin t) \\ y(t) = \left(\frac{\pi}{2} + t\right) (\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t) \log(\sin t) \end{array} \right]$$

$$\text{b. } \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + e^{2t} \\ x'_2 = 2x_2 - x_3 \\ x'_3 = 2x_3 \\ x_1(0) = x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{c. } & \begin{cases} x' = y + \cos t \\ y' = z \\ z' = -2x - y - 2z \\ x(0) = y(0) = 0 \\ z(0) = -1 \end{cases} \\
\text{d. } & \begin{cases} x' = 1234x + 5678y + 9z \\ y' = 5678x + 9y + 1234z \\ z' = 9x + 1234y + 5678z \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

2.2 Esercizi vari

1. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - 2x_2 + t \\ x'_2 = x_1 - x_2 + \frac{1}{1 + \cos t} \\ x_1(0) = -2 \log 2 \\ x_2(0) = -\log 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) = -3 \cos t + \sin t + t + 3 - 2t \sin t - 2 \cos t \log(1 + \cos t) \\ x_2(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t + t - t \sin t - \cos t \log(1 + \cos t) \end{bmatrix}$$

2. Si integri il seguente sistema

$$\begin{cases} u' - 4v = \sin x \\ v' - u - 3v = x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - x + \frac{3}{4} + \frac{6}{17} \sin x - \frac{7}{17} \cos x \\ v(x) = \frac{1}{4} (-c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{4x} - 1 + \frac{6}{17} \cos x - \frac{10}{17} \sin x) \end{bmatrix}$$

3. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 - x_4 \\ x'_2 = x_1 - x_3 \\ x'_3 = -x_2 + x_4 \\ x'_4 = -x_1 + x_3 \\ x_1(0) = x_4(0) = 1 \\ x_2(0) = x_3(0) = -1 \end{cases}$$

$$[x_1(t) = x_4(t) = -x_2(t) = -x_3(t) = e^{-2t}]$$

4. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \frac{1}{\cos^3 t} \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) = -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2 \cos t} \\ y(t) = \frac{1}{2} \sin t + \frac{\sin t}{2 \cos^2 t} \end{bmatrix}$$

3 Equazioni differenziali di ordine superiore al primo

3.1 Lineari a coefficienti costanti

3.1.1 Metodo di verosimiglianza

1. Si integrino le seguenti equazioni

a. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$

$$[y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}, c_i \in \mathbb{R}.]$$

- b. $y^{(4)} - 3y''' = 0$ $[y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{3x}, c_i \in \mathbb{R}.]$
- c. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$ $[y(x) = c_1 + c_2e^{-2x} \cos 3x + c_3e^{-2x} \sin 3x, c_i \in \mathbb{R}.]$
- d. $y^{(6)} - y^{(4)} - y'' + y = 0$ $[y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x} + c_5 \cos x + c_6 \sin x, c_i \in \mathbb{R}.]$
- e. $y'' + 6y' + 9y = 0$ $[y(x) = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}, c_i \in \mathbb{R}.]$
- f. $y^{(4)} - 3y''' = x + 1$ $[y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{3x} - x^3(\frac{x}{72} + \frac{2}{27}), c_i \in \mathbb{R}.]$
- g. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$ $[y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + c_3x^2e^{-2x}, c_i \in \mathbb{R}.]$
- h. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$ $[y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x}, c_i \in \mathbb{R}.]$
- i. $y''' + y = 0$ $[y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x, c_i \in \mathbb{R}.]$
- l. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$ $[y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 \cos x + c_4 \sin x, c_i \in \mathbb{R}.]$
- m. $y''' - 3y' + 2y = x^2e^x$ $[y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x} + (\frac{1}{36}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{1}{27})x^2e^x, c_i \in \mathbb{R}.]$
- n. $y^{(4)} + 2y'' = x^2$ $[y(x) = c_1 + c_2x + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x + \frac{x^2}{4}(\frac{x^2}{6} - 1), c_i \in \mathbb{R}.]$
- o. $3y'' + 8y' + 4y = e^{-x} + \sin x$ $[y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-\frac{2}{3}x} - e^{-x} + \frac{1}{65} \sin x - \frac{8}{65} \cos x, c_i \in \mathbb{R}.]$
- p. $y'' - 2y' + y = x^3 - 6x^2$ $[y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + x^3 - 6x - 12, c_i \in \mathbb{R}.]$
- q. $y'' - 2y' + y = e^x + e^{2x}$ $[y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x + e^{2x}, c_i \in \mathbb{R}.]$
- r. $y'' - 2y' + y = e^x + \sin x$ $[y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{2} \cos x, c_i \in \mathbb{R}.]$
- s. $y^{(4)} - y = e^x \cos x$
- t. $y^{(4)} - y = xe^x \sin x$
- u. $y'' + 2y' + y = \frac{\log x}{e^x}, \quad x > 0$ $[y(x) = e^{-x} (c_1 + c_2x + (2 \ln(x) - 3)x^2/4), c_i \in \mathbb{R}.]$

2. Si risolvano

- a. $\begin{cases} y'' + y' = t^2 + 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ $[y(t) = -3 + 3t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 3e^{-t}.]$
- b. $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ $[y(x) = e^{-x}(e^{-x} - 1 + x).]$
- c. $\begin{cases} y''' + 3y'' + 3y' + y = 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 3 \end{cases}$ $[y(x) = e^{-x}(1 + x + x^2) + 1.]$
- d. $\begin{cases} y''' + 9y' = 2 \cos x - \sin x \\ y(\pi) = -9/8 \\ y'(\pi) = 11/4 \\ y''(\pi) = 73/8 \end{cases}$ $[y(x) = \frac{1}{8} \cos x + \frac{1}{4} \sin x + \cos(3x) - \sin(3x).]$
- e. $\begin{cases} y''' + 2y'' + 2y' + y = x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$ $[y(x) = e^{-x} + e^{-x/2}(\cos(\sqrt{3}x/2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}x/2)) + x - 2.]$
- f. $\begin{cases} y''' + y'' + y' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$ $[y(x) = 1 - \frac{1}{2}(e^{-x} + \cos x + \sin x).]$
- g. $\begin{cases} y'' - 8y' + 15y = 2e^{3x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ $[y(x) = \frac{1}{2}(e^{5x} - e^{3x} - 2xe^{3x}).]$

3. Si trovi un integrale particolare delle seguenti equazioni

- a. $y'' - 4y' + 4y = x^{30}e^{2x}$
- b. $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = t^{32}e^{-t}$

4. Si scriva una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti che abbia per soluzioni particolari tutte le funzioni date

- a. $y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2, \quad y_4 = e^x$
 b. $y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = e^{2x}, \quad y_3 = e^{2x}x, \quad y_4 = \cos x$
 c. $y_1 = e^{-3x} \sin x \cos x, \quad y_2 = e^{-3x} \cos 2x, \quad y_3 = e^{3x}$

5. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \alpha \end{cases}$$

verifica la relazione $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = -\infty$.

[$\alpha < -1$.]

3.1.2 Con metodo di variazione delle costanti arbitrarie

1. Si integrino le seguenti equazioni

a. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ [$y(x) = \cos x \log(\cos x) + x \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x, c_i \in \mathbb{R}$.]

b. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$

2. Si risolvano

a. $\begin{cases} x'' - 4x = \frac{4}{1+e^{4t}} \\ x(0) = -\pi/4 \\ x'(0) = -1 \end{cases}$ [$x(t) = (\frac{1}{2} - \arctan e^{2t}) \cosh(2t) - \frac{1}{2}$.]

b. $\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ [$y(x) = \frac{\sin^2 x}{2 \cos x}$.]

c. $\begin{cases} y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x+2} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y'' - y = \frac{1}{\cosh x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

3.2 Lineari a coefficienti non costanti

3.2.1 Equazioni di Eulero I

1. Si integrino le seguenti equazioni

a. $x^2 y'' + xy' + y = 1$ [$y(x) = c_1 \cos \log|x| + c_2 \sin \log|x| + 1, c_i \in \mathbb{R}$.]

b. $(1+x)^2 y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$, per $x > 1$
[$y(x) = (c_1 + c_2 \log(1+x))(1+x)^2 + (1+x)^3, c_i \in \mathbb{R}$.]

c. $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$ [$y(x) = c_1 x^3 + c_2 \frac{1}{x}, c_i \in \mathbb{R}$.]

d. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x$ [$y(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + \frac{1}{2}x, c_i \in \mathbb{R}$.]

e. $x^2 y'' + 5xy' + 3y = \frac{1}{x}$

2. Si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy e la si determini:

a. $\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$ [$y(x) = 2x^2(1 - 2 \log x)$.]

$$\begin{array}{l}
\text{b. } \begin{cases} x^2 y'' - xy' + y = 2x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \quad [y(x) = x(\log x + \log^2 x).] \\
\text{c. } \begin{cases} x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 3 \\ y''(1) = 6 \end{cases} \quad [y(x) = x^3.] \\
\text{d. } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + 9y = \log(27x) \\ y(e^\pi) = \frac{\log 3}{3} + \frac{\pi}{9} \\ y'(e^\pi) = 0 \end{cases}
\end{array}$$

3. Si risolva in almeno tre modi

$$(3x + 2)y'' + 7y' = 0 \quad [y(x) = c_1 + c_2(3x + 2)^{-4/3}, c_i \in \mathbb{R}.]$$

3.2.2 Equazioni di Eulero II (con metodo di variazione delle costanti arbitrarie)

1. Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni

$$\begin{array}{l}
\text{a. } x^2 y'' + 4xy' + 2y = \cos x, \quad x > 0 \quad [y(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2 - \cos x}{x^2}, c_i \in \mathbb{R}.] \\
\text{b. } x^2 y'' + xy' - y = -\frac{x^2}{x+2}, \quad x > 0
\end{array}$$

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicità locale del seguente problema di Cauchy, lo si risolva

$$\begin{cases} x^2 y'' - 20y = 9x^7 - 3x^2 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

3.3 Esercizi vari

1. Per ogni intero n positivo, sia f_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1/n \end{cases}$$

Si studi la convergenza uniforme di f_n .

[Convergenza uniforme in ogni insieme inferiormente limitato.]

2. Per ogni intero n positivo, sia y_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} -\frac{1}{n}y'' + 2y' - 1 = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Si determini il più ampio insieme di convergenza uniforme di y_n .

$[(-\infty, 0].]$

3. Le funzioni

$$y_1(x) = xe^2 \quad y_2(x) = (x+1)e^x \quad y_3(x) = x(x+e^x)$$

sono integrale particolari di una equazione differenziale del secondo ordine lineare. La si determini.

$$[x(2-x)y'' + (x^2-2)y' + 2(1-x)y + (x^2-4x+2)e^x = 0.]$$

4. Si risolva

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + y = \log x \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases} \quad [y(x) = \cos \log x + \log x.]$$

5. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si determini l'integrale generale di

$$x^{(iv)} + (1 - a)x''' - ax'' = (t + 1)$$

6. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^3 z''' + (3 - a)x^2 z'' + (1 - a + a^2)xz' - a^3 z = \log x \\ z(1) = z'(1) = 0 \\ z''(1) = 1 \end{cases}$$

$$[se\ a = 0, z(x) = \ln^2 x + \frac{1}{24} \ln^4 x; se\ a \neq 0, z(x) = \frac{a^2+1}{2a^4} x^a - \frac{a^2-1}{2a^4} (\sin(a \ln x) + \cos(a \ln x)) - \frac{1}{a^3} \ln x - \frac{1}{a^4}.]$$

7. Determinare due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale

$$x^2 y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = 0$$

nell'intervallo $(0, \infty)$, cercandole nella famiglia $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = x^2 \\ y(\pi) = y'(\pi) = 1 \end{cases} \quad [y(x) = (-\pi^2 \sin x - 2 \cos x + x^2 - 2)/x^2.]$$

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2y = 0 \\ y(1) = a \\ y'(1) = b \end{cases}$$

- Si stabilisca al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ l'esistenza e l'unicità locale della soluzione $y_{a,b}$ e, quando possibile, la si determini.
- Si determinino $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ in modo tale che $y_{a,b}$ possa essere definita su tutto \mathbb{R} .
- Si determinino, al variare di $c \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad [a. y_{a,b}(x) = \frac{1}{3} \left((a+b)x^2 + \frac{2a-b}{x} \right).]$$

9. Si determini l'integrale generale della seguente equazione

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3 e^{2x}$$

cercando per l'equazione dell'omogenea associata soluzioni della forma $y(x) = e^{\alpha x}$ e $y(x) = x^3 e^{\beta x}$.

$$[y(x) = (c_1 + c_2 x^3)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^{2x}, c_i \text{ costanti}.]$$

10. Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y'' - xy' - 8y = -6x^4$$

- Si determinino tutte le soluzioni definite in $(-\infty, 0)$ e in $(0, \infty)$;
- si determinino tutte le soluzioni che sono in $C^2(\mathbb{R})$ e con un punto stazionario in $x = 1/2$.

$$[b. y(x) = \begin{cases} (-\log 2 + 1/4 - \log x)x^4 & se\ x \geq 0 \\ (c - \log |x|)x^4 & se\ x < 0 \end{cases} \text{ per ogni costante } c.]$$

11. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' - x' + 2e^{-t} = 0 \\ x' - y' - y + 2te^t = 0 \\ x(0) = y(0) = 0 \\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) = e^t - e^{-t} \\ y(t) = t(e^t + e^{-t}) \end{bmatrix}$$

12. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{1 + \sin^2 x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$[y(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos x \left[\ln \left(\frac{\sqrt{2} + \cos x}{\sqrt{2} - \cos x} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right) \right] + \sin x [1 + \arctan(\sin x)]]$$

13. Si risolva il problema

$$\begin{cases} x^2 y'' - xy' + y = x^2 \log |x| \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

14. Si consideri il problema

$$\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 4y = \frac{x^3}{2} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

a. Si discuta l'esistenza e l'unicità locale della soluzione del problema;

b. si determinino tutte le soluzioni del problema di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

$$[b. y(x) = cx^2 + x^3/2, c \in \mathbb{R}]$$

15. Si determini l'integrale generale di

$$\begin{cases} 4x'' + x + y = \sin t \\ y' + x + y = \cos t \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t/2} + c_3 - \frac{4}{25} \sin t + \frac{3}{25} \cos t \\ y(t) = (4c_2 - 2c_1 - 2c_2 t)e^{-t/2} - c_3 + \frac{13}{25} \sin t + \frac{9}{25} \cos t \end{bmatrix}$$

16. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = \frac{e^x}{1 + e^x} \\ y(0) = -1/2 \\ y'(0) = 1/2 - \log 2 \end{cases}$$

$$[y(x) = (e^x (x - \log(1 + e^x)) + e^{-x} \log(1 + e^x) - 1)/2.]$$

17. Si consideri l'equazione differenziale

$$25x^2 y'' + 25xy' - 36y = 3x.$$

a. Determinare le soluzioni definite su $(0, \infty)$ che ammettono asintoto obliquo a $+\infty$;

b. determinare le soluzioni definite su tutto \mathbb{R} .

$$[a. y(x) = -\frac{3}{11}x + cx^{-6/5}; b. y(x) = -\frac{3}{11}x.]$$