

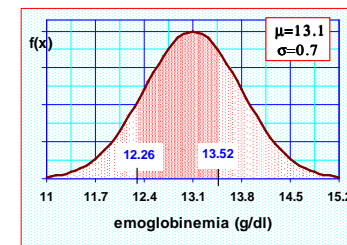
LA DISTRIBUZIONE NORMALE

ESERCITAZIONE

Esempio di applicazione della devinata gaussiana standard

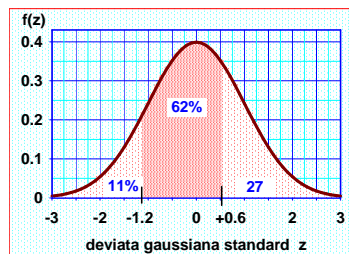
In una popolazione di ragazze di età inclusa tra i 18 e i 25 anni, la concentrazione di emoglobina nel sangue (x) approssima una distribuzione gaussiana con media = 13.1 g/dl e deviazione standard = 0.7 g/dl. In base a queste sole informazioni possiamo calcolare, *ad esempio*, quante ragazze hanno emoglobina inclusa tra 12.26 e 13.52 g/dl.

Distribuzione dell'emoglobina in una popolazione di ragazze di età compresa tra i 18 e i 25 anni.



... continua

Infatti: $z_1 = (12.26 - 13.1) / 0.7 = -1.2$
 $z_2 = (13.52 - 13.1) / 0.7 = +0.6$



Nell'11% delle ragazze i valori di Hb sono minori di 12.26 g/dl, e nel 27% sono maggiori di 13.52 g/dl. Quindi il 62% delle ragazze ha valori di Hb compresi tra 12.26 e 13.52 g/dl.

... continua

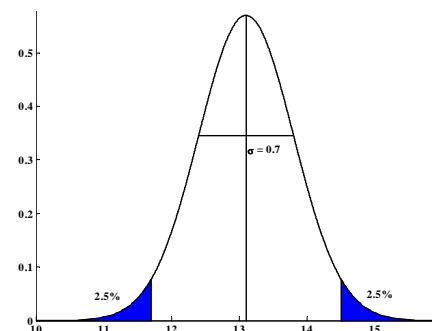
Quali sono i valori che racchiudono il 95% delle osservazioni, che considero come i valori entro cui è compreso il range di normalità?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow x = z \cdot \sigma + \mu \quad \text{con } z_{0.025} = 1.96$$

$$x_{1,2} = \mu \pm z_{0.025} \cdot \sigma$$

$$x_1 = 13.1 - 1.96 \cdot 0.7 = 11.728$$

$$x_2 = 13.1 + 1.96 \cdot 0.7 = 14.472$$



Esercizio 1

Se si suppone che, nella popolazione degli adulti, il livello di acido urico (mg/100 ml) segua una **distribuzione gaussiana** con **media e d.s.** rispettivamente pari a **5.7 e 1** (mg/100ml), si trovi la probabilità che un soggetto scelto a caso da questa popolazione abbia un livello di acido urico:

1. Minore di 4.9 mg/100ml

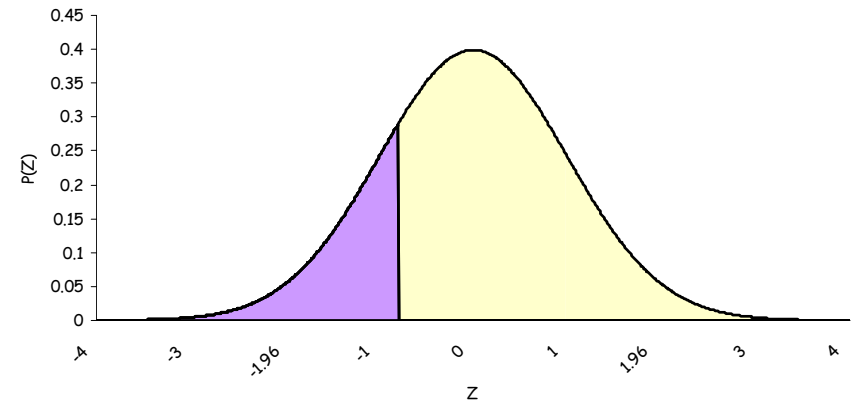
2. Compreso tra 4.9 e 6.2 mg/100ml

3. Trovare inoltre il valore di acido urico x tale per cui $P(X \geq x) = 0.40$



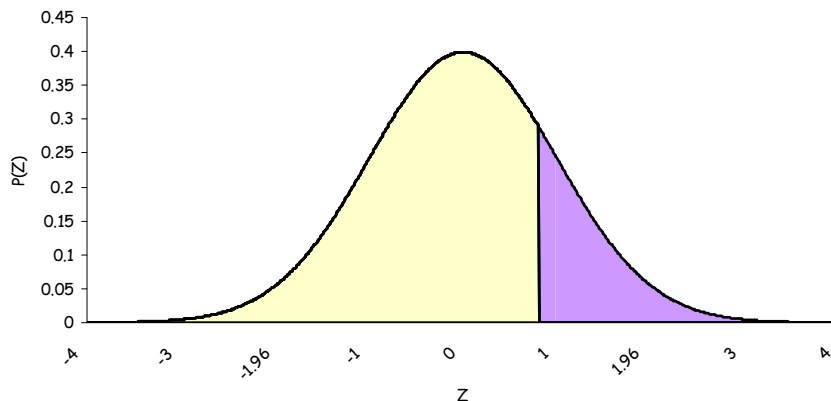
Risposte

$$1. P(X < 4.9) = P\left[\frac{(X - 5.7)}{1} < \frac{(4.9 - 5.7)}{1}\right] = P(Z < -0.8) = \dots$$



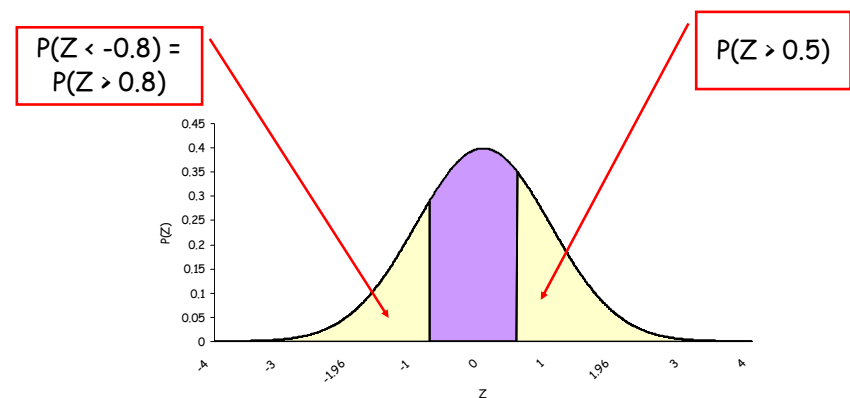
Risposte

$$1. \dots = P(Z > 0.8) = 0.212$$



Risposte

$$2. P(4.9 < X < 6.2) = P(-0.8 < Z < 0.5) = 1 - P(Z > 0.8) - P(Z > 0.5) = 1 - 0.212 - 0.308 = 0.479$$

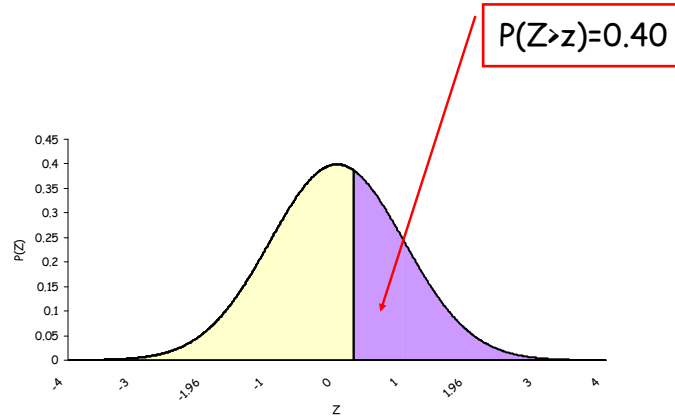


Risposte

3. $P(Z > z_{0.40}) = 0.40 \Rightarrow z_{0.40} = 0.25$

$\frac{x - 5.7}{\sigma} = 0.25 \Rightarrow x = 5.95$

1



Esercizio 2



Da un'indagine svolta su di un campione di neonati, risulta che la distribuzione dei loro pesi alla nascita è normale con media 3.2 e con σ di 0.6 Kg.

1. Qual è il valore della normale standardizzata (Z) per un peso di 4 Kg?
2. Quale percentuale di neonati presenta un peso alla nascita compreso fra 2.2 e 3.5 Kg?
3. Qual è il peso oltre il quale si trovano il 10% dei valori più elevati?

Risposte

1. $z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{4 - 3.2}{0.6} = 1.33$

2. $P(2.2 < X < 3.5)$

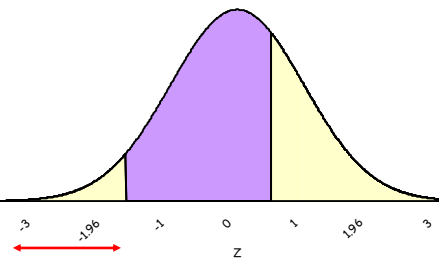
$z_1 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{2.2 - 3.2}{0.6} = -1.66$

$z_2 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{3.5 - 3.2}{0.6} = 0.5$

$P(X < 2.2) = P(Z < -1.66) = P(Z > 1.66) = 0.04846$

$P(X < 3.5) = P(Z < 0.5) = 1 - P(Z > 0.5) = 1 - 0.3085 = 0.6915$

$P(2.2 < X < 3.5) = P(-1.66 < Z < 0.5) = P(Z < 0.5) - P(Z < -1.66)$
 $= 0.6915 - 0.04846 = 0.64$

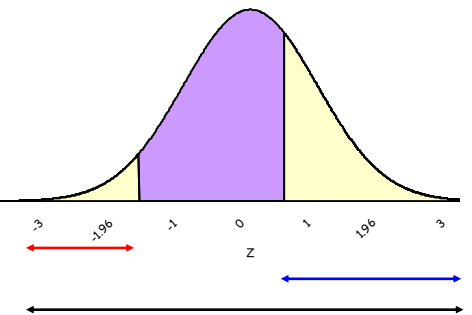


Risposte

2. $P(2.2 < X < 3.5)$

$z_1 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{2.2 - 3.2}{0.6} = -1.66$

$z_2 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{3.5 - 3.2}{0.6} = 0.5$



$P(X < 2.2) = P(Z < -1.66) = P(Z > 1.66) = 0.04846$

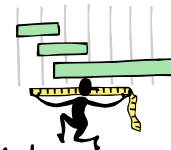
$P(X > 3.5) = P(Z > 0.5) = 0.3085$

$P(2.2 < X < 3.5) = P(-1.66 < Z < 0.5) =$

$= 1 - P(Z > 0.5) - P(Z < -1.66) = 1 - 0.3085 - 0.04846 = 0.64$

Risposte

$$\begin{aligned} 3. \quad P(Z > z) = 10\% = 0.10 &\Rightarrow z_{0.10} = 1.28 \\ \frac{x - \mu}{\sigma} = 1.28 &\Rightarrow \\ \Rightarrow x = 1.28 \times \sigma + \mu &= 1.28 \times 0.6 + 3.2 = 3.96 \end{aligned}$$



Esercizio 3

Ad una visita di controllo, la statura di un bambino di 8 anni è risultata di 130 cm. Da un'indagine condotta su una popolazione di 10000 bambini di pari età (8 anni) è risultato che il 10% ha una statura superiore a 133 cm e il 3% una statura inferiore a 115 cm.

- Assumete che la distribuzione delle stature sia approssimativamente gaussiana e calcolate media e varianza della statura nella popolazione.
- Qual è la probabilità di osservare un soggetto con statura inferiore a quella del bambino in esame (130 cm)?

Risposte

a) Poiché:

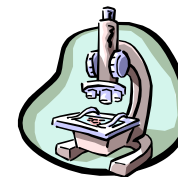
$$P(X > 133) = P(Z > z_1) = 0.1 \text{ e}$$

$$P(X < 115) = P(Z < z_2) = 0.03$$

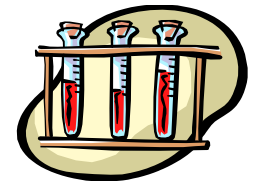
dalle tavole della distribuzione gaussiana standardizzata si ricava facilmente che $z_1 = 1.28$ e $z_2 = -1.88 \Rightarrow$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{133 - \mu}{\sigma} = 1.28 \\ z_2 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{115 - \mu}{\sigma} = -1.88 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 125.71 \\ \sigma = 5.70 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X < 130) &= P[Z < (130 - 125.71)/5.7] = P(Z < 0.75) = \\ &= 1 - 0.2266 = 0.7734 \end{aligned}$$



Esercizio 4



Dall'esame microscopico dei globuli rossi di un paziente affetto da Plasmodium vivax della malaria, è risultato che la **media e la varianza** delle misure del diametro massimo di un **globulo rosso non infettato** sono rispettivamente **7.6** e **0.9** micron, mentre per un **globulo rosso infettato**, la media e la deviazione standard delle misure del diametro massimo sono rispettivamente **9.6** e **1.0** micron. Assumete che i valori riportati siano uguali ai parametri della popolazione e che il diametro massimo dei globuli rossi, infettati e no, sia **distribuito in modo gaussiano** e calcolate:

Quesiti

- a) Quale proporzione di globuli rossi non infettati vi aspettate di trovare con un diametro di misura compreso tra 9.4 e 9.6 micron?
- b) Quale proporzione di globuli rossi non infettati vi aspettate di trovare con un diametro di misura compreso tra 7.6 e 9.4 micron?
- c) Supponete che il 20% dei globuli rossi sia infettato. Quale percentuale di tutti i globuli rossi avrà un diametro superiore a 9.0 micron?

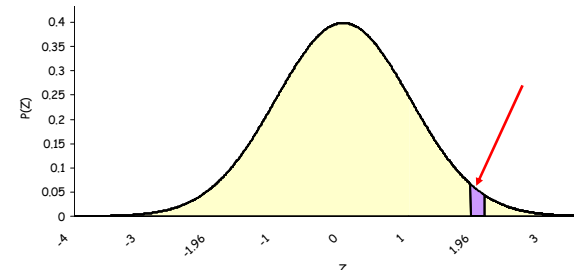
Risposte

- a) La proporzione di globuli rossi non infettati con diametro compreso tra 9.4 e 9.6 micron è:

$$P(9.4 < X < 9.6) = P\left[\frac{(9.4-7.6)}{\sqrt{0.9}} < z < \frac{(9.6-7.6)}{\sqrt{0.9}}\right] =$$

$$= P(1.897 < Z < 2.108) = P(Z > 1.897) - P(Z > 2.109) =$$

$$= 0.028717 - 0.01786 = 0.01086$$

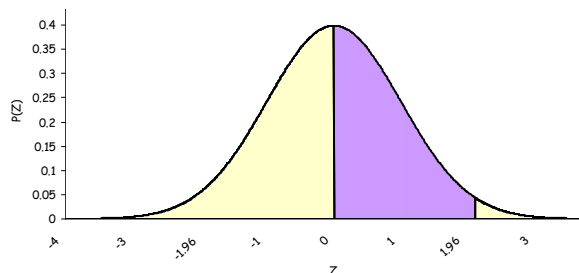


- b) La proporzione di globuli rossi non infettati con diametro compreso tra 7.6 e 9.4 micron è:

$$P(9.4 < X < 9.6) = P\left[\frac{(7.6-7.6)}{\sqrt{0.9}} < z < \frac{(9.6-7.6)}{\sqrt{0.9}}\right] =$$

$$= P(0 < Z < 1.897) = P(Z > 0) - P(Z > 1.897) =$$

$$= 0.5 - 0.028717 = 0.471$$



- c) La proporzione di globuli rossi non infettati (S) con diametro maggiore di 9 micron è:

$$P(X_S > 9) = P\left[Z > \frac{(9-7.6)}{\sqrt{0.9}}\right] = P(Z > 1.4757) = 0.07078$$

La proporzione di globuli rossi infettati (M) con diametro maggiore di 9 micron è:

$$P(X_M > 9) = P\left[Z > \frac{(9-9.6)}{1}\right] = P(Z > -0.6) =$$

$$= 1 - P(Z < -0.6) = 1 - P(Z > 0.6) = 0.72575$$

Se i globuli rossi infettati sono il 20%, la proporzione di tutti i globuli rossi con un diametro maggiore di 9 micron è:

$$P(X > 9) = 0.8 \times 0.07078 + 0.2 \times 0.72575 = 0.201774$$

Esercizio 5

La distribuzione del peso della popolazione di maschi in giovane età è gaussiana con media 67.5 Kg e deviazione standard 2.5 Kg. Se si estraggono a caso 200 soggetti da questa popolazione, quanti avranno:

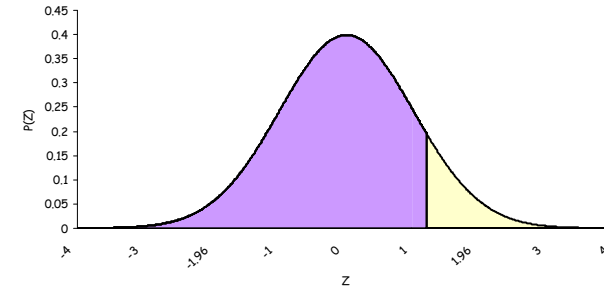


1. Peso minore di 70.5 Kg?
2. Peso compreso fra 65 e 68 Kg?
3. Qual è il valore di peso superato dal 2.3% della popolazione?

Risposte

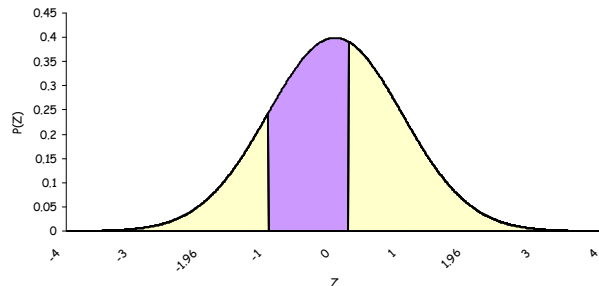
$$1. P(X < 70.5) = P(Z < 1.2) = 1 - 0.115 = 0.885$$

$$\# \text{ soggetti con peso} < 70.5 \text{ Kg} = 200 \times 0.885 = 177$$



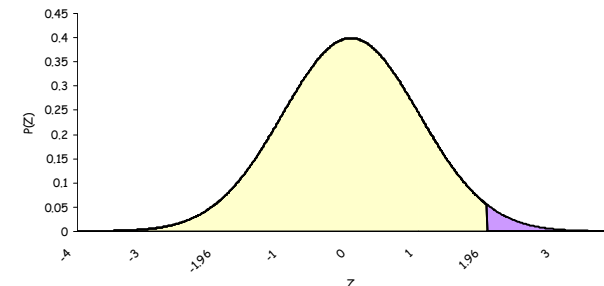
$$\begin{aligned} 2. P(65 < X < 68) &= P(-1 < Z < 0.2) = \\ &= 1 - P(Z > 1) - P(Z > 0.2) = 1 - 0.159 - 0.421 = \\ &= 0.42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \# \text{ soggetti con peso compreso tra 65 e 68 Kg} \\ &= 200 \times 0.42 = 84 \end{aligned}$$



$$3. P(Z > z_{0.023}) = 0.023 \Rightarrow z_{0.023} = 1.99$$

$$(x - 67.5) / 2.5 = 1.99 \Rightarrow x = 72.48$$



Esercizio 6

I laureati di una certa facoltà hanno una votazione media di 100 con una ds di 4. Supponiamo che la distribuzione dei voti sia normale:

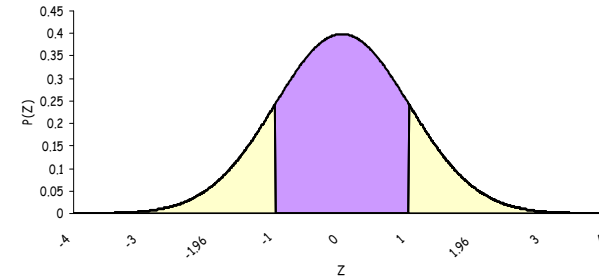
a) Calcolare la percentuale di laureati che ha ottenuto un voto compreso tra 96 e 104

b) Calcolare la percentuale di laureati che ha ottenuto un voto maggiore di 108

c) Calcolare lo scarto interquartile

Risposte

$$\begin{aligned} \text{a) } P(96 < L < 104) &= \\ &= P\left[\frac{(96-100)}{4} < Z < \frac{(104-100)}{4}\right] = P(-1 < Z < 1) = \\ &= 1 - 2 \cdot 0.15866 = 0.6827 = 68.27\% \text{ dei laureati ha preso} \\ &\text{un voto compreso tra 96 e 104} \end{aligned}$$



Risposte

$$\begin{aligned} \text{b) } P(L > 108) &= \\ &= P\left(Z > \frac{(108-100)}{4}\right) = P(Z > 2) = 0.02275 = \\ &2.275\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(L < Q_3) &= 0.75 = \\ &= P\left[\frac{(L - \mu)}{\sigma} < \frac{(Q_3 - \mu)}{\sigma}\right] = P(z < z_0) = 0.75 \\ z_0 &= 0.67 \Rightarrow Q_3 = 0.67 \cdot 4 + 100 = 102.68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(L < Q_1) &= 0.25 = \\ &= P\left[\frac{(L - \mu)}{\sigma} < \frac{(Q_1 - \mu)}{\sigma}\right] = P(z < z_0) = 0.25 \\ z_0 &= -0.67 \Rightarrow Q_1 = -0.67 \cdot 4 + 100 = 97.32 \\ Q_1 - Q_3 &= 102.68 - 97.32 = 5.36 \end{aligned}$$

Esercizio 7

Una ditta confeziona scatole di caffè di contenuto medio di 1 Kg, con ds di 6 g. Se la legge impedisce di mettere in commercio col peso dichiarato di 1 Kg confezioni che contengono meno di 985 g, quante confezioni in media, ogni 1000, non potranno essere messe in commercio?

Risposta

$$\begin{aligned} P(X < 985) &= P[Z < (985 - 1000) / 6] = \\ &= P(Z < -2.5) = 0.00621 \\ \# \text{ confezioni} &= 0.00621 * 1000 = 6.21 \end{aligned}$$

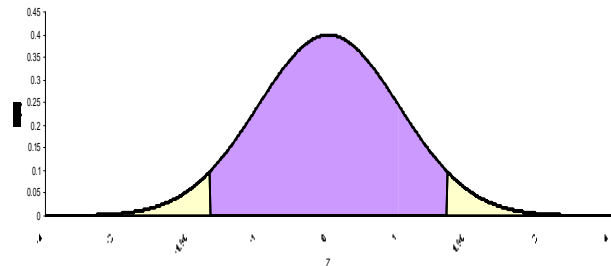
Esercizio 8

Una macchina produce sbarrette la cui lunghezza è una variabile casuale normale di media $\mu = 25$ cm e ds $\sigma = 0.2$ cm

1) Calcolare la probabilità che la lunghezza di una sbarretta differisca dal suo valor medio di almeno 0.5 cm.

Risposte

$$\begin{aligned} 1) P(X \leq \mu - 0.5; X \geq \mu + 0.5) &= \\ &= 1 - P(\mu - 0.5 \leq X \leq \mu + 0.5) = \\ &= 1 - P(-0.5 / 0.3 \leq Z \leq 0.5 / 0.3) = 1 - P(-1.67 \leq Z \leq 1.67) = \\ &= 1 - (1 - (2 * 0.04746)) = 0.09492 \end{aligned}$$



Esercizio 9

La durata delle telefonate urbane segue una distribuzione normale di media $\mu=10$ minuti e $\sigma=3$ minuti. Selezionato un campione casuale semplice di 20 telefonate, trovare la distribuzione della media campionaria e la probabilità che la durata media delle telefonate sia compresa tra 9.5 e 10.3 minuti

Risposte

- La distribuzione della media campionaria è:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \bar{x} \sim N\left(10, \frac{3^2}{20}\right) \Rightarrow \bar{x} \sim N(10, 0.45)$$

- $P(9.5 < \bar{x} < 10.3) = P(\bar{x} > 9.5) - P(\bar{x} > 10.3) =$

$$= P\left(z > \frac{9.5-10}{3/\sqrt{20}}\right) - P\left(z > \frac{10.3-10}{3/\sqrt{20}}\right) =$$

$$= P(z > -0.7454) - P(z > 0.4472) =$$

$$= 1 - P(z > 0.7454) - P(z > 0.4472) =$$

$$= 1 - 0.22965 - 0.32636 = 0.44399$$

Esercizio 10

Gli occupati di un determinato settore economico vengono pagati con un salario medio di 45 € l'ora e ds pari a 5 €. Assumendo che la distribuzione dei salari possa essere approssimata mediante una distribuzione normale, calcolare:

i) La probabilità che un occupato guadagni meno di 44 € l'ora

Risposte

i) $X \sim N(45, 25) \Rightarrow$

$$P(X < 44) = P[Z < (44-45)/5] = P(Z < -0.2) =$$

$$= P(Z > 0.2) = 0.42074$$

Malattie cardiovascolari: ipertensione arteriosa

- Media e deviazione standard della pressione arteriosa sistolica per gruppi di età (valori espressi in mmHg)

Età (yr)	Media	SD	Livello limite
1-14	105,0	5,0	115,0
15-44	125,0	10,0	140,0

- Ammettiamo che le persone con valori di PAS superiori al limite dichiarato per gruppo di età siano definite ipertese.
- Qual è la proporzione degli ipertesi nel gruppo di età tra 1 e 14 anni? Quale nel gruppo di età tra 15 e 44 anni?

Malattie cardiovascolari: ipertensione arteriosa

- Standardizziamo
- Per $x=115$ ottengo

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{115,0 - 105,0}{5,0} = 2,00$$

- Per $x=140$ ottengo

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{140,0 - 125,0}{10,0} = 1,50$$

Malattie cardiovascolari: ipertensione arteriosa

- Dalla tabella 1:
 - $\Pr(z > 2,00) = 0,0228$
 - Il **2,3%** dei bambini tra 1 e 14 anni è iperteso
- Dalla tabella 1:
 - $\Pr(z > 1,50) = 0,0668$
 - Il **6,7%** dei soggetti tra 15 e 44 anni è iperteso