Matematica

1. Modelli matematici e relazioni funzionali

Giuseppe Vittucci Marzetti[1]

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2020-21

[1]Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

Elementi essenziali di un modello matematico

La matematica è l'estensione del senso comune con altri mezzi.

(Ellenberg, 2014, p.30)

Modello matematico

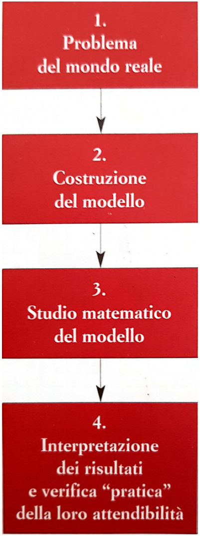
Costruzione di una particolare *riproduzione* della *realtà*, che permette di analizzarla matematicamente.

Nella definizione si ritrova il riferimento a:

- realtà: un particolare fenomeno fisico, biologico, economico o sociale.
- riproduzione: la realtà è troppo complessa per essere studiata compiutamente una volta riprodotta fotograficamente, e quindi la riproduzione diventa idealizzata e semplificata.
- la modalità matematica di analisi: la semplificazione della realtà è funzionale alla sua traduzione in formule, ovvero al suo successivo studio con il linguaggio della matematica.

Fasi della modellizzazione matematica

1. **Analisi del fenomeno**.
2. **Costruzione del modello**, individuando le grandezze del fenomeno e le loro reciproche relazioni che si ritengono essenziali.
3. **Studio matematico del modello**.
4. **Interpretazione e verifica empirica dei risultati**.

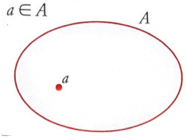


Modelli matematici e relazioni funzionali

- Il concetto di **funzione** e la **teoria delle funzioni** sono centrali nello studio delle relazioni tra le grandezze del fenomeno considerate.
- Due semplici esempi economici:
  - **Funzione di costo**: relazione tra la quantità prodotta di una certa merce e il costo totale di produzione della merce stessa.
  - **Funzione di domanda**: relazione tra il prezzo di un bene e la quantità domandata del bene stesso.
- Esistono casi in cui la corrispondenza non è tra numeri.
  Es. la funzione che associa un tratto di curva all'area sottostante ad essa.
- Per trattare anche questi casi è necessario definire il concetto di funzione come corrispondenza tra elementi di due insiemi.

Concetti di insieme e appartenenza

- Assumiamo il concetto di **insieme** come **primitivo**, sinonimo di **collezione**, **classe**, **popolazione**.
- Indichiamo gli insiemi con le lettere maiuscole (es. $A, B, \ldots$) e i loro elementi con le lettere minuscole (es. $a, b, \ldots$).
- L'elemento a appartiene all'insieme A: $a \in A$
- L'elemento a non appartiene all'insieme A: $a \notin A$
- L'**insieme vuoto** ($\emptyset$) è un insieme che non possiede alcun elemento.
- Un insieme può essere rappresentato:
  - elencando i suoi elementi: $A = \{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$
  - ricorrendo ai **diagrammi di Venn**.



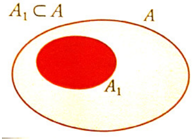
Sottoinsieme

- L'insieme A_1 è un **sottoinsieme** dell'insieme A quando ogni elemento di A_1 appartiene anche ad A:

$$A_1 \subseteq A$$

- A_1 è contenuto **propriamente** nell'insieme A quando A_1 è un sottoinsieme di A ed esiste almeno un elemento di A che non appartiene ad A_1:

$$A_1 \subset A$$



Operazioni fondamentali con gli insiemi

- **Unione** di due insiemi A e B: l'insieme $A \cup B$ costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno degli insiemi A e B.
- **Intersezione** di due insiemi A e B: l'insieme $A \cap B$ costituito dagli elementi che appartengono sia ad A sia a B.
  - Due insiemi si dicono **disgiunti** quando non hanno elementi comuni:

$$A \cap B = \emptyset$$

- **Differenza** di due insiemi A e B: l'insieme $A \backslash B$ (leggiamo A meno B) costituito dagli elementi di A che non appartengono a B.
  - L'insieme $A \backslash B$ è l'insieme **complementare** di B rispetto ad A.
  - Quando è chiaro dal contesto rispetto a quale insieme si determina il complementare, il complementare di B può indicarsi con B^c (o $\overline{B}$).
- **Prodotto cartesiano** di due insiemi A e B è l'insieme $A \times B$ delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

Proprietà delle operazioni fondamentali con gli insiemi

- **Proprietà commutativa**:

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

- **Proprietà associativa**:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- **Proprietà distributiva**:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- L'unione di due insiemi non disgiunti può esprimersi come unione di tre insiemi disgiunti non vuoti:

$$A \cup B = (A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)$$

Leggi di De Morgan

- **Prima legge di De Morgan**: il complementare dell'intersezione tra due insiemi è uguale all'unione dei complementari.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- **Seconda legge di De Morgan**: il complementare dell'unione tra due insiemi è uguale all'intersezione dei complementari.

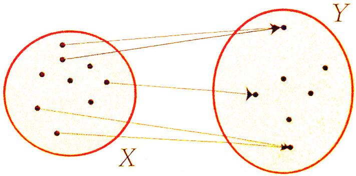
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Concetto di funzione

Dati due insiemi X e Y chiamiamo **funzione** da X in Y una corrispondenza **univoca**, che associa cioè a ogni $x \in X$ (al più) un unico $y \in Y$.

$$f : A \subseteq X \mapsto Y$$

- L'insieme di partenza X è chiamato **dominio** della funzione.
- L'insieme di arrivo Y è chiamato **codominio** della funzione.
- Il sottoinsieme A di X da cui partono le frecce è chiamato **insieme di definizione** (o **di esistenza**).
- Il sottoinsieme di Y dei valori assunti dalla funzione è detto **insieme delle immagini**.



Concetto di funzione

- A ogni elemento $x \in A$ attraverso f è associato un unico elemento $y \in Y$.
    - x è la **variabile indipendente**.
    - y è la **variabile dipendente**.
- La notazione $f(x)$ rappresenta quel particolare elemento di Y che è immagine tramite f di $x \in X$.

Quantificatori

- **Quantificatore universale**:
  - $\forall$ per ogni, per tutti.
  - Per ogni x $P(x)$ è vera.

$$\forall x \quad P(x)$$

- **Quantificatore esistenziale**:
  - $\exists$ esiste (almeno uno).
  - Esiste almeno un x tale che $P(x)$ è vera.

$$\exists x : P(x)$$

- **Quantificatore esistenziale di unicità**:
  - $\exists!$ esiste uno e un solo.
  - Esiste uno e un solo x tale che $P(x)$ è vera.

$$\exists! x : P(x)$$

- Negazione dei quantificatori
  - $\nexists$ non esiste.
  - Non esiste un x tale che $P(x)$ è vera.

$$\nexists x : P(x)$$

Funzione composta

- Siano date le funzioni

$$f : A \subseteq X \mapsto Y$$

$$g : Y \mapsto Z$$

- La **funzione composta** h mediante f e g, indicata con:

$$h = g[f] \quad \text{oppure} \quad h = g \circ f$$

è la funzione $h : A \subseteq X \mapsto Z$ che ad ogni $x \in A \subseteq X$ associa $g[f(x)]$.

Funzioni iniettive e funzione inversa

- Una funzione $f : A \subseteq X \mapsto Y$ si dice **iniettiva** quando elementi distinti di A hanno in Y immagini distinte. In simboli:

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ con } x_1 \neq x_2 \text{ si ha } f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Sia $f : A \subseteq X \mapsto Y$ una funzione iniettiva. La sua **funzione inversa**

$$f^{-1} : f(X) \subseteq Y \mapsto X$$

è la funzione che a ogni y associa la sua controimmagine.

- Se una funzione è iniettiva, $f(x) = y$ implica $x = f^{-1}(y)$.
- La funzione composta attraverso f e f^{-1} (in qualunque ordine considerate) è la funzione identità:

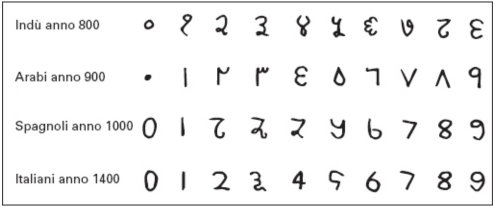
$$x = f^{-1}[f(x)]$$

$$y = f[f^{-1}(y)]$$

I numeri

- La matematica ha avuto inizio con i numeri e l'invenzione di simboli scritti per indicare i numeri.
- Nel corso di migliaia di anni, i matematici hanno costruito una vasta super-struttura sui fondamenti del numero (geometria, analisi infinitesimale, probabilità, ecc.) e hanno scoperto concetti più basilari dei numeri (teoria degli insiemi, logica matematica).
- I numeri hanno avuto origine da "contrassegni di argilla" utilizzati almeno dall'8000 a. C. in Mesopotamia dai contabili per registrare i possedimenti (Stewart, 2008):
  - Per evitare manomissioni, i contabili sigillavano i contrassegni in buste di argilla.
  - Potevano sapere quanti contrassegni erano contenuti in una busta, rompendola, per poi costruirne una nuova per la successiva archiviazione, ma...
  - rompere e ricostruire la busta era poco efficiente, così cominciarono a incidere sulla busta simboli che ne rappresentassero il contenuto.
  - Questo passaggio creò di fatto un insieme di "simboli numerici scritti".

I simboli numerici



Fonte: Stewart, 2008.

Figura: Evoluzione dei simboli numerici occidentali

Fonte: Stewart, 2008.

Figura: La traccia delle tacche nei numerali moderni

Gli insiemi numerici

- I principali insiemi numerici sono:
  - $\mathbb{N}$, l'insieme dei **numeri naturali**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

  - $\mathbb{Z}$, l'insieme dei **numeri interi**;

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$$

  - $\mathbb{Q}$, l'insieme dei **numeri razionali**, ovvero l'insieme di tutti i numeri che possono essere scritti sotto forma di frazione.

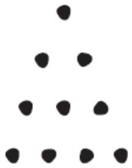
$$\mathbb{Q} = \left\{ \pm \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$$

  - $\mathbb{R}$, l'insieme dei **numeri reali**, composto dall'unione dell'insieme dei numeri razionali e **irrazionali**.
- Relazioni tra gli insiemi numerici:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Insiemi discreti, densi, discontinui e continui

- $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono insiemi **discreti**.
- $\mathbb{Q}$ è un insieme:
  - **denso**: $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\ \exists\, q_3 \in \mathbb{Q} : q_1 < q_3 < q_2$.
  - **discontinuo**: compresi tra due numeri razionali ce ne sono alcuni che sono **irrazionali**, ovvero non possono essere espressi come rapporto di due numeri interi.
- La scoperta dei numeri irrazionali viene tradizionalmente attribuita al pitagorico Ippaso di Metaponto (VI a.C.). Secondo la leggenda:
  - Ippaso scoprì i numeri irrazionali tentando di rappresentare la radice quadrata di 2 come frazione.
  - Credendo nell'assolutezza dei numeri, Pitagora non poteva accettare l'esistenza dei numeri irrazionali.
  - Non essendo in grado di confutare la dimostrazione, condannò Ippaso a morte e mantenne segreta l'esistenza degli irrazionali.



Simbolismo mitologico dei pitagorici:
1 principio primo;
2 principio femminile;
3 principio maschile;
4 elementi: terra, aria, fuoco, acqua.

Dimostrazione dell'esistenza dei numeri irrazionali

- Dimostrazione **per assurdo** che non esiste alcun $q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$.
  - Se tale q esistesse si avrebbe $\left(\pm\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ da cui $m^2 = 2n^2$.
  - Tale eguaglianza però non può essere soddisfatta perché in $2n^2$ il fattore 2 compare un numero dispari di volte, mentre in m^2:
    - se m è dispari il fattore 2 non compare;
    - se m è pari il fattore 2 compare un numero pari di volte.
- Essendo la misura della diagonale d di un quadrato di lato l data da:

$$d = l\sqrt{2}$$

  (applicazione del teorema di Pitagora) ed essendo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ne deriva che il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato è un numero irrazionale (i segmenti sono **incommensurabili**).
- I numeri razionali, sebbene infiniti dato un qualsiasi intervallo finito, non sono abbastanza "numerosi" da coprire il **continuo** della retta.

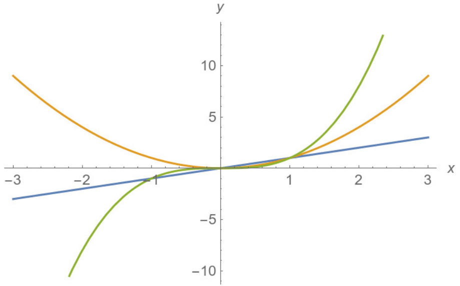
Grafici delle funzioni reali di variabile reale

- Data la funzione reale di variabile reale $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, chiamiamo il suo **grafico** l'insieme delle coppie (x, y) in cui x appartiene al campo di esistenza della funzione e y è il valore corrispondente a x:

$$\mathrm{gr}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\}$$

- Es.

```
Plot[{x, x^2, x^3}, {x, -3, 3}, AxesLabel → {x, y}]
```



I connettivi logici

- **Connettivi logici**: congiunzioni o locuzioni con cui è possibile comporre tra loro due o più **proposizioni** (o **enunciati**), dando origine a una nuova proposizione (o **enunciato composto**).
- Il nuovo enunciato ha un **valore di verità** – vero (V) o falso (F) – che dipende dal valore di verità delle proposizioni che la compongono e dai connettivi logici.
- Se, in virtù della sua particolare struttura, l'enunciato composto è sempre:
  - vero si parla di **tautologia**;
  - falso si parla di **contraddizione**.
- Nell'**algebra booleana**, quel ramo dell'algebra in cui i valori delle variabili sono valori di verità (vero o falso), "vero" è spesso indicato con 1 e "falso" con 0.

I connettivi logici

- Connettivo logico **unario**, cioè operante su un solo enunciato:
  - **Negazione** (simbolo $\neg$ o con barra orizzontale sulla proposizione, letto "non"): dato un enunciato p, la sua negazione ($\neg p$ o $\overline{p}$) ha valore di verità opposto.
- Connettivi logici **binari**, cioè operanti su due enunciati:
  - **Congiunzione** (simbolo $\wedge$, letto "e"): un enunciato composto con questo connettivo è vero solo se sono veri entrambi gli enunciati che lo compongono.
  - **Disgiunzione inclusiva** (simbolo $\vee$, letto "o"): un enunciato composto con questo connettivo è vero solo se è vero almeno uno tra gli enunciati che lo compongono.
  - **Disgiunzione esclusiva** (simbolo $\dot{\vee}$, letto "xor"): un enunciato composto con questo connettivo è vero solo se le due proposizioni che lo compongono hanno valore di verità opposto.
  - **Implicazione materiale** (simbolo $\rightarrow$, letto "implica"): dati due enunciati p e q, la proposizione composta $p \rightarrow q$ (letto: "se p allora q" o "p implica q") è falsa solo se p è vera e q è falsa.
  - **Coimplicazione (doppia implicazione materiale)** (simbolo $\leftrightarrow$, letto "se e solo se"): un enunciato composto con questo connettivo è vero solo se i due enunciati di partenza hanno lo stesso valore di verità.

Tavole della verità

Le regole logiche sono sintetizzate nelle **tavole** (o **tabelle**) **di verità**.

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

Regole di precedenza

Se un enunciato composto è formato da più di due proposizioni unite da connettivi logici diversi, per determinarne il valore di verità si seguono le seguenti regole di precedenza:

1. negazione;
2. congiunzione
3. disgiunzione;
4. implicazione;
5. coimplicazione.

Implicazione materiale vs logica

- L'implicazione è un legame tra proposizioni che mette in relazione i valori di verità di due enunciati, chiamati **antecedente** e **conseguente**.
- Dall'implicazione materiale a volte si distingue l'implicazione logica.
- L'**implicazione logica** (simbolo $\Longrightarrow$) esprime una relazione tra **predicati**, ovvero enunciati il cui valore di verità dipende da una o più variabili, appartenenti a un determinato dominio.
- Esempio:

  "$p(x)$: x è un triangolo, con x appartenente all'insieme delle figure piane"

  è un predicato che può essere vero o falso in base ad x.

L'implicazione logica

- Dati due predicati $p(x)$ e $q(x)$, se ogni x che rende vero $p(x)$ rende vero anche $q(x)$, si dice che $p(x)$ implica logicamente $q(x)$:

$$p(x) \implies q(x)$$

  in tal caso si dice che:
  - $p(x)$ è **condizione sufficiente** per il verificarsi di $q(x)$;
  - $q(x)$ è **condizione necessaria** per il verificarsi di $p(x)$.
- Se invertendo i due predicati $p(x)$ e $q(x)$ si ottiene un'ulteriore implicazione logica, ossia se

$$p(x) \implies q(x) \qquad \text{e} \qquad q(x) \implies p(x)$$

  i due predicati sono logicamente equivalenti e si usa la notazione:

$$p(x) \iff q(x) \qquad \text{o} \qquad p(x) \equiv q(x)$$

  In tal caso si dice che $p(x)$ è **condizione necessaria e sufficiente** per il verificarsi di $q(x)$.

Alcuni principi e leggi notevoli della logica proposizionale

- Principio del terzo escluso: $p \vee \overline{p}$
- Principio di non contraddizione: $\overline{p \wedge \overline{p}}$
- Legge della doppia negazione: $p \equiv \overline{\overline{p}}$
- Proprietà commutativa:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p; \qquad p \vee q \equiv q \vee p$$

- Proprietà associativa:

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r); \qquad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

- Proprietà distributiva:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r); \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Leggi di De Morgan:

$$\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}; \qquad \overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}.$$