I ESERCITAZIONE 24-10-2018

ESERCIZIO 1 Dati gli insiemi $A = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ e $B = \{4, 7, 8\}$, individuare gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$

$A \cup B = \{1, 3, 4, 6, 7, 8\}$

$A \cap B = \{4, 7\}$

$A \setminus B = \{1, 3, 6\}$

$B \setminus A = \{8\}$

$A \times B = \{(1,4), (1,7), (1,8), (3,4), (3,7), (3,8), (4,4), (4,7), (4,8), (6,4), (6,7), (6,8), (7,4), (7,7), (7,8)\}$

ESERCIZIO 2 Dati gli insiemi $A = \{3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{b = 2n+1, n \in \mathbb{N}\}$, individuare gli insiemi $B \setminus A$, $A \setminus B$, $(A \setminus B) \times A$, $\overline{B}$.

$B \setminus A = \{1\} \cup \{b = 2n+1, n \in \mathbb{N}, n > 2\}$

$A \setminus B = \{4, 6\}$

$(A \setminus B) \times A = \{4, 6\} \times \{3, 4, 5, 6\} = \{(4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$\overline{B} = B^c = \{b = 2n, n \in \mathbb{N}\}$

OSS: Poiché B è l'insieme dei numeri dispari appartenenti ad $\mathbb{N}$, il suo complementare, B^c, sarà l'insieme dei numeri pari appartenenti ad $\mathbb{N}$.

ESERCIZIO 3 Determinare la funzione inversa di

a) $f(x) = 3x + 5$

b) $f(x) = 1 - 2x$

c) $f(x) = x^3 + 5$

a) Affinché esista la funzione inversa di $f(x) = 3x+5$ si deve avere che $f(x) = 3x+5$ sia iniettiva cioè $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$ si abbia $f(x_1) \neq f(x_2)$

Verifichiamo che $f(x) = 3x+5$ sia iniettiva

Presi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$ sono sempre vere le seguenti relazioni:

$$3x_1 \neq 3x_2$$

$$3x_1 + 5 \neq 3x_2 + 5$$ che equivale a

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

$\Rightarrow f$ è iniettiva. $\Rightarrow \exists f^{-1}$

Dunque da $f(x) = y \Rightarrow \underbrace{f^{-1} \circ f}_{id}(x) = f^{-1}(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y)$

Scrivo $f(x) = y$, cioè $3x+5 = y$ ed esplicito rispetto a x:

$$3x = y - 5$$

$$x = \frac{y-5}{3}$$

Quindi $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y-5}{3}$

Si ha dunque $f^{-1}(y) = \dfrac{y-5}{3}$

b) Verifichiamo che $f(x) = 1 - 2x$ sia iniettiva

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$ si ha

$$2x_1 \neq 2x_2$$
$$-2x_1 \neq -2x_2$$
$$-2x_1 + 1 \neq -2x_2 + 1$$
$$1 - 2x_1 \neq 1 - 2x_2$$

cioè $f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Rightarrow$ f è iniettiva $\Rightarrow$ $\exists f^{-1}$

Scrivo $f(x) = y$ cioè $1 - 2x = y$ ed esplicito rispetto alla x

$$1 - 2x = y$$
$$-2x = y - 1$$
$$2x = -y + 1$$
$$x = \frac{1-y}{2}$$

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$$

Dunque $f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$

c) Verifichiamo che $f(x) = x^3 + 5$ sia iniettiva

Presi $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$ sono sempre vere le relazioni

$$x_1^3 \neq x_2^3$$
$$x_1^3 + 5 \neq x_1^3 + 5$$

cioè $f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Rightarrow$ f è iniettiva $\Rightarrow$ $\exists f^{-1}$

Calcolo f^{-1}

Poiché da $f(x) = y \Rightarrow f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

Scrivo $f(x) = y$

$x^3 + 5 = y$ ed esplicito rispetto ad x

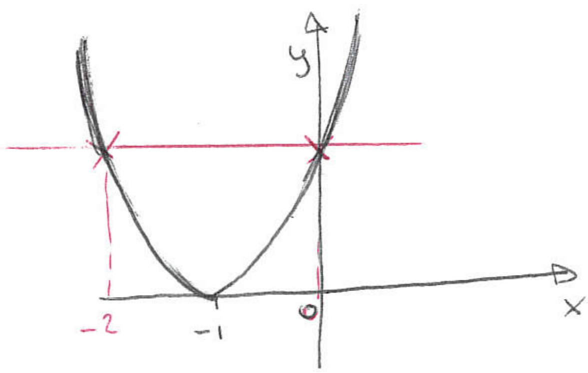
$x^3 = y - 5$

$x = \sqrt[3]{y-5}$

Dunque $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-5} \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-5}$

ESERCIZIO 4 Stabilire se la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x+1)^2$ è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. Altrimenti determinare il più grande intervallo contenente il punto $x = 0$, tale che la restrizione di f a questo intervallo sia invertibile, e scrivere la funzione inversa.

La funzione $f(x) = (x+1)^2$ è una parabola con concavità verso l'alto e vertice nel punto $(-1, 0)$



Notiamo subito, osservando il grafico, che la funzione non è iniettiva su $\mathbb{R}$

Infatti per $x = 0$ e $\cancel{x} = -2$ la $y = f(\cancel{x})$ coincide

$f(x=0) = 1 \qquad f(x=-2) = 1$

Dunque presi $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$ non è iniettiva in $\mathbb{R} \Rightarrow \nexists f^{-1}$ in $\mathbb{R}$

Se però restringiamo $\mathbb{R}$ agli intervalli $[-1, +\infty)$ oppure $(-\infty, -1]$ la funzione sarà iniettiva e quindi invertibile.

Dunque, tra i due intervalli, quello più grande contenente $x = 0$ sarà $[-1, +\infty)$

Quindi presa $f: [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ defìnta da

$f(x) = (x+1)^2$ essa sarà invertibile.

Calcoliamo l'inversa:

Poiché da $f(x) = y \Rightarrow f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y)$

Scrivo $f(x) = y$

$(x+1)^2 = y$ ed esplicito rispetto a x

$x+1 = \sqrt{y}$

$x = \sqrt{y} - 1$

Dunque $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1$

-5-