

Matematica

2. Funzioni, equazioni e disequazioni lineari e quadratiche

Giuseppe Vittucci Marzetti¹

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2020-21

¹Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

- 1 **Alcuni richiami di concetti di base**
 - Prodotti e scomposizioni notevoli di polinomi
 - Somma, differenza, prodotto e quoziente di frazioni algebriche
 - Proprietà delle potenze
 - Richiamo sui radicali
- 2 **Classificazione delle funzioni**
 - Funzioni crescenti e decrescenti
 - Funzioni concave e convesse
 - Funzioni pari e dispari
- 3 **Funzioni, equazioni e disequazioni lineari**
 - Funzioni lineari
 - Equazioni lineari
 - Disequazioni lineari in un'incognita
 - Disequazioni lineari in due incognite
- 4 **Funzioni, equazioni e disequazioni quadratiche**
 - Funzioni quadratiche
 - Fasci di parabole
 - Equazioni quadratiche
 - Disequazioni quadratiche

Prodotti e scomposizioni notevoli di polinomi

- Due esempi di **raccoglimento a fattore comune**:

$$a^2b + ab^2 = ab(a + b)$$

$$ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d)$$

- **Prodotto di una somma per una differenza**:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

- **Quadrato di un binomio**:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$



Quadrato di binomio

$$(a + b)^2 =$$

$$a^2 + b^2 + ab + ab$$

Prodotti e scomposizioni notevoli di polinomi

- **Cubo di un binomio:**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

- **Somma e differenza di due cubi:**

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Somma e differenza di frazioni algebriche

- Una **frazione algebrica** è il quoziente di due polinomi.
- Per calcolare la **somma/differenza di frazioni algebriche** occorre:
 - scomporre i denominatori in fattori;
 - determinare le condizioni di esistenza;
 - calcolare il minimo comune multiplo (mcm), ovvero prendere i fattori comuni e non comuni con il più grande esponente;
 - dividere il mcm per i denominatori e moltiplicare il risultato per i numeratori;
 - sommare/sottrarre i termini simili;
 - scomporre il numeratore e semplificarlo con il denominatore;
 - scrivere la frazione finale.
- Esempio:

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2-2x} &= \frac{x+3}{(x+2)(x-2)} + \frac{x-4}{x(x-2)} \\ &= \frac{x(x+3)}{x(x+2)(x-2)} + \frac{(x+2)(x-4)}{x(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{x^2+3x+x^2-4x+2x-8}{x(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2+x-8}{x(x+2)(x-2)}\end{aligned}$$

Prodotto e quoziente di frazioni algebriche

- Per calcolare il **prodotto di frazioni algebriche** occorre:
 - scomporre i numeratori e i denominatori;
 - determinare le condizioni di esistenza, cioè in pratica escludere i valori che annullano uno o più denominatori;
 - eliminare i termini uguali che si trovano sia al numeratore sia al denominatore;
 - moltiplicare numeratore con numeratore e denominatore con denominatore

- Esempio:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \cdot \frac{3x - 9}{x^2 - 2x} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} \cdot \frac{3\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-2)}} = \frac{3x+6}{x^2+3x}$$

- Per calcolare il **quoziente di frazioni algebriche** occorre riscrivere la prima frazione moltiplicata per l'inverso della seconda e poi procedere come per il prodotto.

Proprietà delle potenze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Richiamo sui radicali

- Alle operazioni sui radicali è possibile applicare tutte le proprietà delle potenze semplicemente ricordando che:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

- Nota bene:** come nel caso delle potenze, non è valida alcuna proprietà relativamente alla radice di una somma:

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

Funzioni crescenti e decrescenti

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ è detta

- **crescente in senso stretto (o monotona crescente)** quando:

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ con } x_2 > x_1 \text{ si ha } f(x_2) > f(x_1)$$

- **crescente (o monotona non decrescente)** quando:

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ con } x_2 > x_1 \text{ si ha } f(x_2) \geq f(x_1)$$

- **decrescente in senso stretto (o monotona decrescente)** quando:

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ con } x_2 > x_1 \text{ si ha } f(x_2) < f(x_1)$$

- **decrescente (o monotona non crescente)** quando:

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ con } x_2 > x_1 \text{ si ha } f(x_2) \leq f(x_1)$$

Combinazione lineare convessa

- Dati un insieme di elementi x_1, x_2, \dots, x_n e un insieme di numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tali che:

$$\lambda_k \geq 0 \quad \forall k \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$$

allora

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

è una **combinazione lineare convessa** degli elementi x_1, x_2, \dots, x_n .

- Data una coppia di elementi x_1, x_2 e un numero reale $\lambda \in [0, 1]$ ($0 \leq \lambda \leq 1$):

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$$

è una combinazione lineare convessa degli elementi x_1 e x_2 .

Combinazioni lineari convesse e funzioni concave e convesse

- Una funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ nell'intervallo I si dice
 - **convessa** se $\forall x_1, x_2 \in I$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$ si ha

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

- **concava** se $\forall x_1, x_2 \in I$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$ si ha

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

- La funzione è **strettamente convessa (concava)**, se vale la disuguaglianza stretta.

Funzioni pari e dispari

- Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con insieme di esistenza A simmetrico rispetto all'origine si dice:
 - **pari** quando $\forall x \in A$ si ha

$$f(x) = f(-x)$$

- **dispari** quando $\forall x \in A$ si ha

$$f(x) = -f(-x)$$

- Il grafico di una funzione:
 - pari risulta simmetrico rispetto all'asse y (delle ordinate);
 - dispari risulta simmetrico rispetto all'origine degli assi.

Funzioni lineari

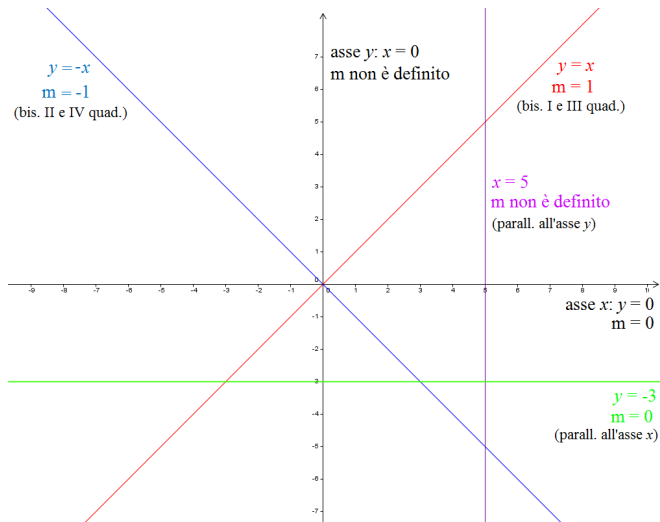
- Le **funzioni lineari** (o **affini**) sono tutte le funzioni del tipo:

$$f(x) = q + mx$$

dove:

- $m \in \mathbb{R}$ è una costante chiamata **coefficiente angolare**.
 - representa la **pendenza** della retta.
 - se positivo (negativo), la retta è inclinata positivamente (negativamente).
 - se uguale a 0, la retta è parallela all'asse delle ascisse.
 - due rette sono **parallele** se hanno lo stesso coefficiente angolare.
 - due rette sono **perpendicolari** quando il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1.
- $q \in \mathbb{R}$ è una costante chiamata **intercetta**.
- Il grafico di una funzione lineare è una retta.
 - Se $q = 0$ la retta passa per l'origine degli assi.
 - Se $q = 0$ e $m \neq 0$ la funzione rappresenta grandezze che sono legate da rapporti di **proporzionalità**.

Funzioni lineari



Equazioni lineari

- Per un punto di coordinate (x_1, y_1) :
 - passano infinite rette;
 - l'equazione del **fascio di rette** passanti per il punto è:

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

- Per due punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) :
 - passa una e una sola retta (primo postulato di Euclide);
 - l'**equazione della retta passante per due punti** è:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- La soluzione della seguente **equazione lineare** (o di **primo grado**), porta ad individuare il punto in cui la retta $y = mx + q$ interseca l'asse x :

$$0 = mx + q \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{q}{m}$$

Disequazioni lineari

- La **disequazione lineare** (o **di primo grado**):

$$mx + q > 0$$

individua l'insieme dei valori di x in corrispondenza dei quali la retta $y = mx + q$ si trova al di sopra dell'asse x .

- Es.: data la retta di equazione $y = -2x + 6$, l'insieme dei valori di x per i quali la retta si trova al di sopra dell'asse delle ascisse è:

$$-2x + 6 > 0, \quad 2x < 6, \quad x < 3$$

NB: cambiando il segno cambia anche il verso della disequazione.

- Una disequazione di primo grado in un'incognita può sempre ridursi alla forma:

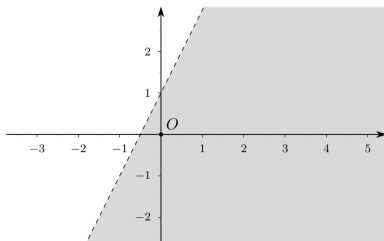
$$ax + b \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0$$

Disequazioni lineari in due incognite

- Una **disequazione lineare in due incognite** (x e y) si può sempre porre nella forma:

$$ax + by + c \lesseqgtr 0$$

- Identificando $ax + by + c = 0$ una retta nel piano e dividendo una retta il piano in due semipiani, una disequazione di primo grado in due incognite ha come soluzioni tutti i punti di uno dei semipiani.
- Per sapere quale, basta scegliere un punto in uno dei due semipiani (fuori dalla retta origine) e verificare se la disequazione è soddisfatta.



La disequazione $2x - y + 1 > 0$

Fonte: Battaia, 2016.

Funzioni quadratiche

- Una **funzione quadratica** è una funzione reale di variabile reale ($f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$) della forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

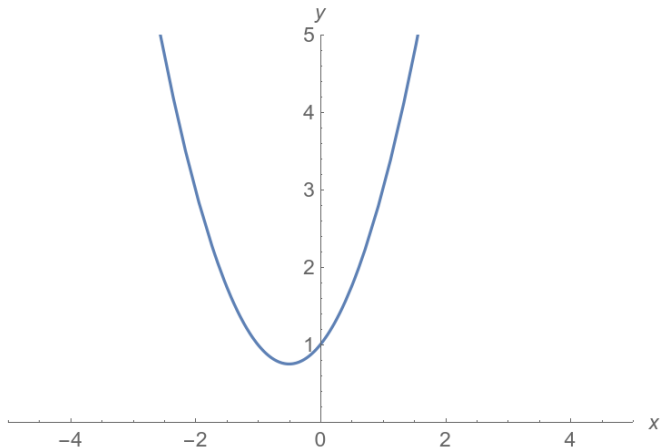
con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

- Il grafico associato a questo tipo di funzioni è una **parabola** con asse parallelo all'asse delle ordinate.
- Per disegnare la parabola è utile sapere che:
 - il segno di a determina la concavità/concavità della parabola:
 - se $a > 0$ la funzione è **convessa**;
 - se $a < 0$ la funzione è **concava**.
 - il **vertice** ha coordinate:

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

- l'**intersezione con l'asse delle ordinate** è pari a c .

Esempio di parabola



$$f(x) = x^2 + x + 1$$

Esempio di sistema di equazioni lineari

- Per determinare l'equazione della parabola (con asse parallelo all'asse delle y) passante per tre punti, date le coordinate dei tre punti (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) , si risolve un **sistema lineare** di tre equazioni in tre incognite (a, b, c) .

$$\begin{cases} a x_1^2 + b x_1 + c = y_1 \\ a x_2^2 + b x_2 + c = y_2 \\ a x_3^2 + b x_3 + c = y_3 \end{cases}$$

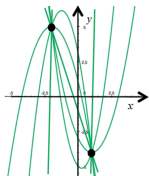
NB: il sistema potrebbe non avere soluzioni o dare luogo ad una **parabola degenera** (una retta).

- Per determinare l'equazione della parabola con vertice nel punto (x_1, y_1) e passante per il punto (x_2, y_2) si risolve il seguente sistema lineare di tre equazioni in tre incognite (a, b, c) .

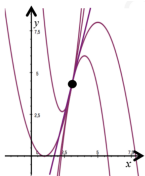
$$\begin{cases} a x_1^2 + b x_1 + c = y_1 \\ a x_2^2 + b x_2 + c = y_2 \\ -b = x_1 2a \end{cases}$$

I fasci di parabole

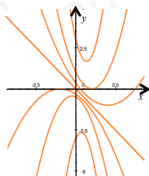
- Il fascio di parabole è l'insieme delle parabole che possiamo disegnare al variare delle costanti.
- Cinque tipi di fasci di parabole:
 - Parabole **secanti** in due punti;
 - Parabole **tangenti** in un punto base;
 - Parabole senza punti in comune;
 - Parabole **congruenti** con stesso asse di simmetria;
 - Parabole **congruenti** con un punto in comune.



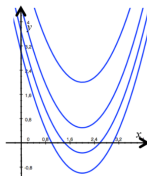
a.



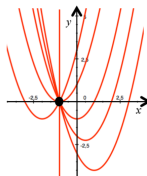
b.



c.



d.



e.

Fonte: Redooc.

Equazioni quadratiche

- Le **equazioni quadratiche** (o **di secondo grado**) in un'incognita sono del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

- Per risolvere questa equazione si ricorre alla formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

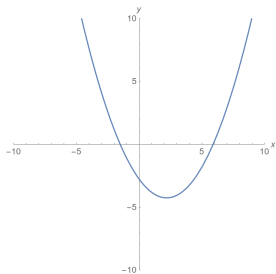
la quantità $\Delta = b^2 - 4ac$ (detto **discriminante**, o **delta**) determina il numero e la natura delle soluzioni:

- due soluzioni distinte se $\Delta > 0$.
 - una soluzione se $\Delta = 0$ (soluzioni coincidenti, o soluzione doppia).
 - nessuna soluzione nell'insieme dei numeri reali se $\Delta < 0$.
NB: In quest'ultimo caso l'equazione ha due soluzioni nell'insieme dei numeri complessi.
- Utilizzando le soluzioni dell'equazione (**radici** del polinomio) è possibile scomporre il polinomio in fattori:

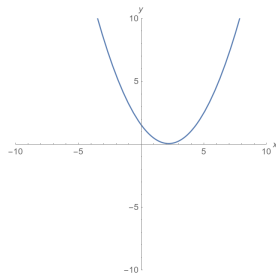
$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Interpretazione geometrica delle equazioni quadratiche

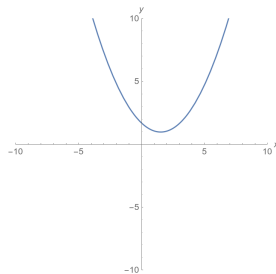
- Le soluzioni di un'equazione quadratica indicano i punti in cui la parabola associata interseca l'asse delle x .



(a) Due soluzioni



(b) Una soluzione



(c) Nessuna soluzione reale

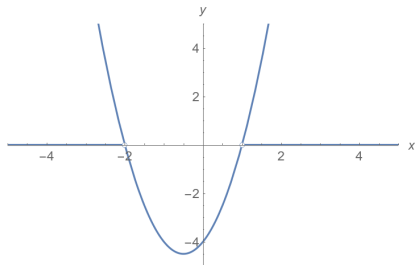
Disequazioni quadratiche in un'incognita

- Una **disequazione quadratica (di secondo grado)** in un'incognita può sempre esprimersi in una delle seguenti forme:

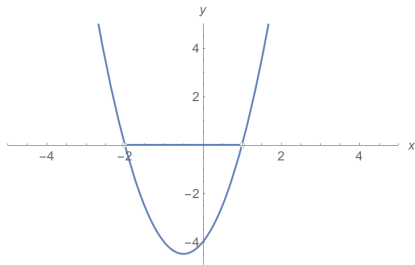
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

- Per risolverla occorre:
 - determinare le radici dell'equazione corrispondente;
 - considerare la parabola associata e valutare dal grafico quali sono le x che corrispondono alle porzioni della parabola che si trovano:
 - sopra l'asse delle ascisse, in caso di verso maggiore ($>$);
 - sotto l'asse delle ascisse, in caso di verso minore ($<$).

Esempi di disequazioni quadratiche in un'incognita

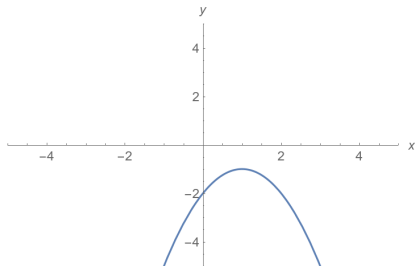


(a) $2x^2 + 2x - 4 \geq 0$, $x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$

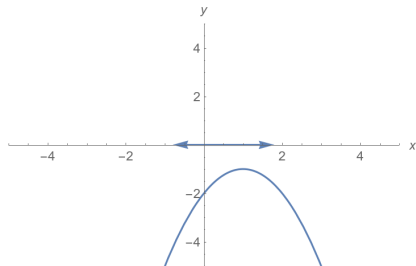


(b) $2x^2 + 2x - 4 < 0$, $x \in (-2, 1)$

Esempi di disequazioni quadratiche in un'incognita

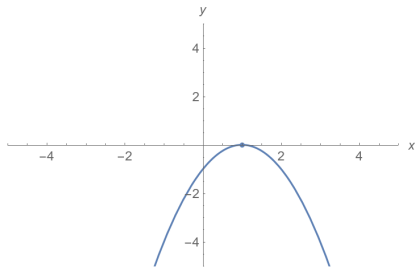


(a) $-x^2 + 2x - 2 \geq 0$, Nessuna soluzione reale

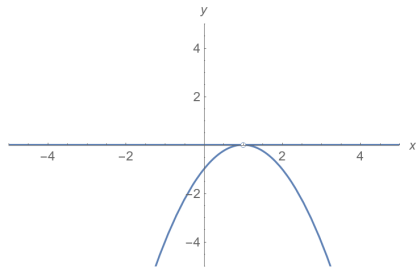


(b) $-x^2 + 2x - 2 < 0$, $x \in (-\infty, \infty)$

Esempi di disequazioni quadratiche in un'incognita



(a) $-x^2 + 2x - 1 \geq 0, x = 1$



(b) $-x^2 + 2x - 1 < 0, x \neq 1$