ESERCIZIO 1

Scrivere l'equazione delle rette

a) r passante per i punti di coordinate $(-1, 1)$ e $(2;0)$

b) s passante per il punto di coordinate $(1, 2)$ e perpendicolare alla retta di equazione $y = 2x + 3$

c) t passante per il punto di coordinate $(3,4)$ e parallela all'asse x.

d) u passante per il punto di intersezione delle rette $y_1 = 2x + 5$ e $y_2 = -x + 7$ e parallela alla retta di equazione $y_3 = \frac{1}{2}x + 2$

Disegnare il grafico delle rette r, s, t, u.

a) Ricordiamo che per due punti passa una e una sola retta. Dati i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) l'equazione della retta passante per essi è

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Nel nostro caso, dati i punti $(-1, 1)$ e $(2, 0)$, la retta r passante per essi ha equazione

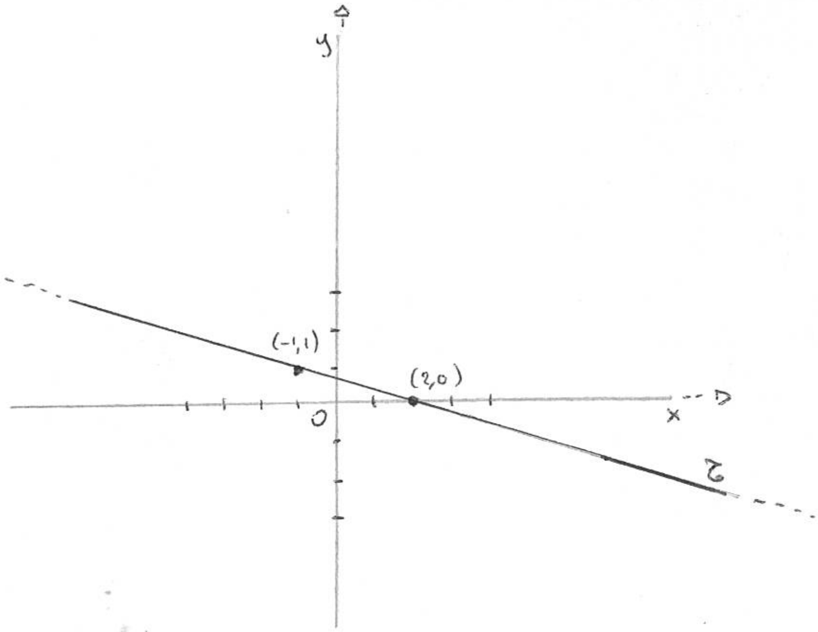
$$r: \quad y = 1 + \frac{0 - 1}{2 - (-1)}(x - (-1))$$

$$y = 1 + \frac{-1}{2+1}(x + 1)$$

$$y = 1 + \frac{-1}{3}(x + 1)$$

$$y = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$r: \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$



b) Sappiamo che due rette sono perpendicolari quando il prodotto dei loro coefficienti angolari e' eguale a -1

Per cui, visto che la retta $y = 2x + 3$ ha coefficiente angolare 2, la retta s dovrà avere coefficiente angolare $-\frac{1}{2}$ (Infatti $2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$)

Per trovare l'equazione della retta s scriviamo l'equazione del fascio passante per il punto $(1, 2)$ e imponiamo che $m = -\frac{1}{2}$

Ricordiamo che l'equazione del fascio di rette passanti per il punto (x_1, y_1) e'

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

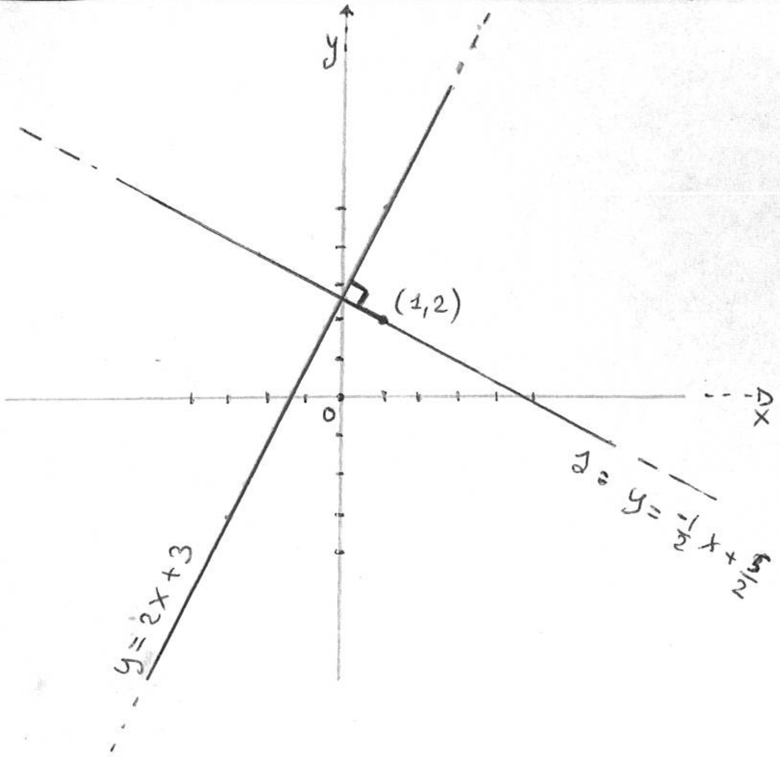
Nel nostro caso $(x_1, y_1) = (1, 2)$ e $m = \frac{1}{2}$

L'equazione della retta s sarà:

$$s: \quad y = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

$$y = 2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$s: \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

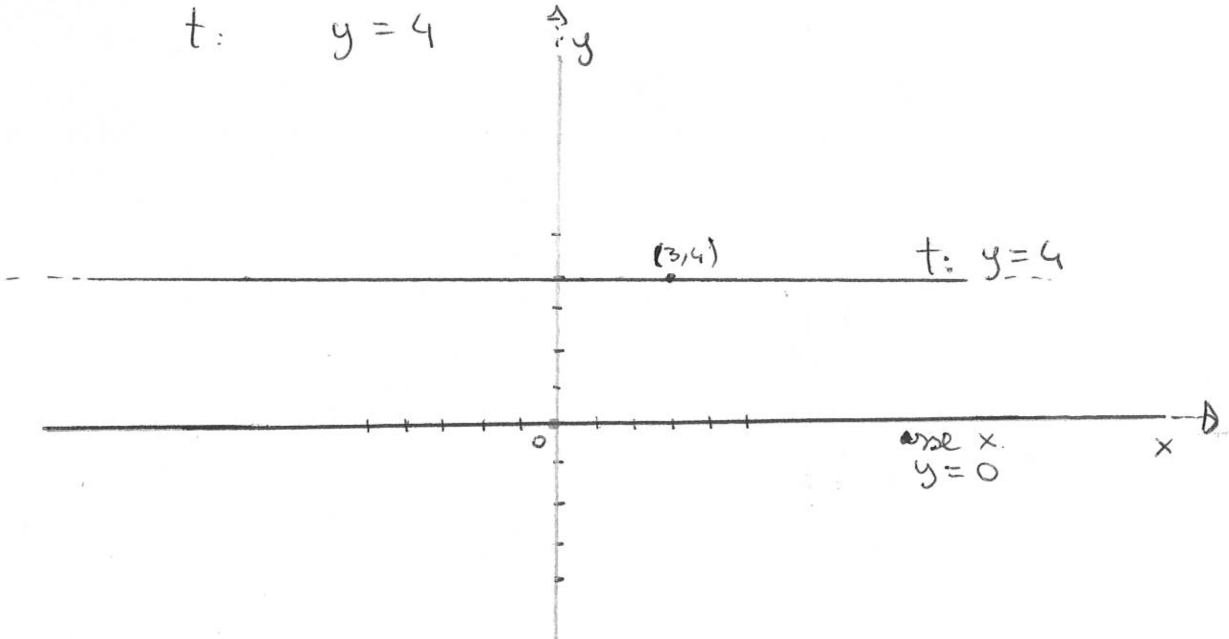


e) Poiché due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare, diciamo che la retta t dovrà avere lo stesso coefficiente angolare dell'asse delle x (equazione $y = 0$). La retta t avrà quindi coefficiente angolare $m = 0$, cioè sarà del tipo $y = q$

Per trovare l'equazione della retta t scriviamo l'equazione del fascio passante per il punto (3, 4) e imponiamo che $m = 0$

t: $y = 4 + 0(x - 3)$

t: $y = 4$



d) Ricaviamo il punto di intersezione delle rette $y_1 = 2x + 5$ e $y_2 = -x + 7$ risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -x + 7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2(7-y) + 5 \\ x = 7 - y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 - y \\ y = 14 - 2y + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 - y \\ y + 2y = 14 + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 - y \\ 3y = 19 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 - y \\ y = \frac{19}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 - \frac{19}{3} \\ y = \frac{19}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{19}{3} \end{cases}$$

Quindi la retta u passa per il punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{19}{3}\right)$ ed è parallela alla retta $y_3 = \frac{1}{2}x + 2$ quindi avrà coefficiente angolare $m = \frac{1}{2}$. Troviamo quindi l'equazione della retta u scrivendo il fascio di rette passante per il punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{19}{3}\right)$ e imponendo che $m = \frac{1}{2}$

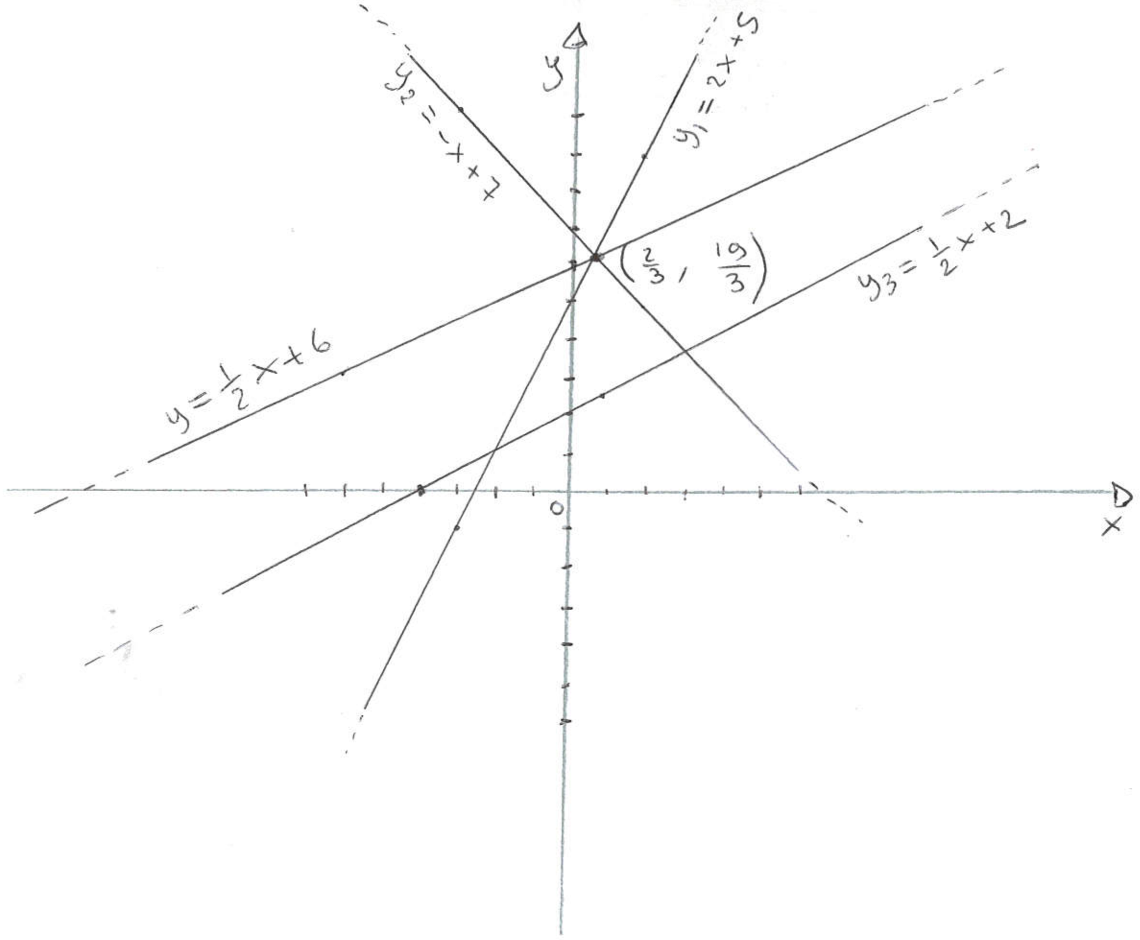
$$u: \quad y = \frac{19}{3} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$y = \frac{19}{3} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{19}{3} - \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{\cancel{18}^{6}}{\cancel{3}_{1}}$$

$$u: \quad y = \frac{1}{2}x + 6$$



ESERCIZIO 2 Scrivere l'equazione della parabola (con asse parallelo all'asse y) passante per i punti di coordinate $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 4)$ e disegnarla.

Ricordiamo che per determinare l'equazione della parabola (con asse parallelo all'asse y) passante per tre punti, date le coordinate dei tre punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) occorre risolvere un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite (a, b, c)

$$\begin{cases} a x_1^2 + b x_1 + c = y_1 \\ a x_2^2 + b x_2 + c = y_2 \\ a x_3^2 + b x_3 + c = y_3 \end{cases}$$

Nel nostro caso

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \\ a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 4a - 2b + c = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0 \\ a + b + 0 = 1 \\ 4a - 2b + 0 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 - b \\ 4(1-b) - 2b = 4 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 - b \\ 4 - 4b - 2b = 4 \\ c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 - b \\ -6b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 - b \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ricordando che l'equazione generica di una parabola con asse parallelo all'asse delle y è

$$y = ax^2 + bx + c$$

Otteniamo l'equazione $y = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + c$

$$y = x^2$$

Per disegnare la parabola $y = ax^2 + bx + c$ è utile sapere che

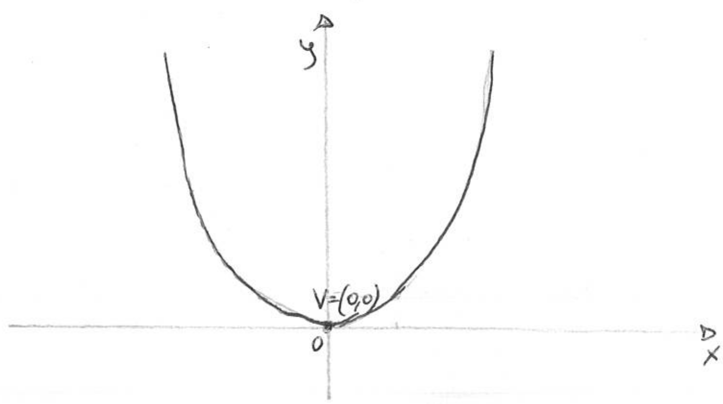
- il segno di a determina la concavità / convessità:
  - se $a > 0$ la funzione è convessa
  - se $a < 0$ la funzione è concava
- il vertice ha coordinate $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$
- l'intersezione con l'asse delle ordinate è pari a c

Nel nostro caso $y = x^2$

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ la funzione è concava

il vertice è $V = \left(-\frac{0}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 0 - 0^2}{4 \cdot 1}\right) = (0, 0)$

L'intersezione con l'asse delle ordinate è 0



ESERCIZIO 3 Scrivere l'equazione della parabola (con asse parallelo all'asse y) che ha vertice in (1, 6) e passa per il punto di coordinate (−1, 10) e disegnarla

Ricordiamo che per trovare l'equazione della parabola con vertice nel punto (x_1, y_1) e passante per il punto (x_2, y_2) occorre risolvere il seguente sistema di 3 equazioni in 3 incognite (a, b, c)

$$\begin{cases} a x_1^2 + b x_1 + c = y_1 \\ a x_2^2 + b x_2 + c = y_2 \\ -b = x_1 2a \end{cases}$$

Nel nostro caso il sistema diventa:

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b 1 + c = 6 \\ a(-1)^2 + b(-1) + c = 10 \\ -b = 1 \cdot 2 \cdot a \end{cases} \quad \begin{cases} a + b + c = 6 \\ a - b + c = 10 \\ -b = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 2a + c = 6 \\ a + 2a + c = 10 \\ b = -2a \end{cases} \quad \begin{cases} -a = -c + 6 \\ 3a + c = 10 \\ b = -2a \end{cases} \quad \begin{cases} a = c - 6 \\ 3(c-6) + c = 10 \\ b = -2a \end{cases} \quad \begin{cases} a = c - 6 \\ 3c - 18 + c = 10 \\ b = -2a \end{cases}$$

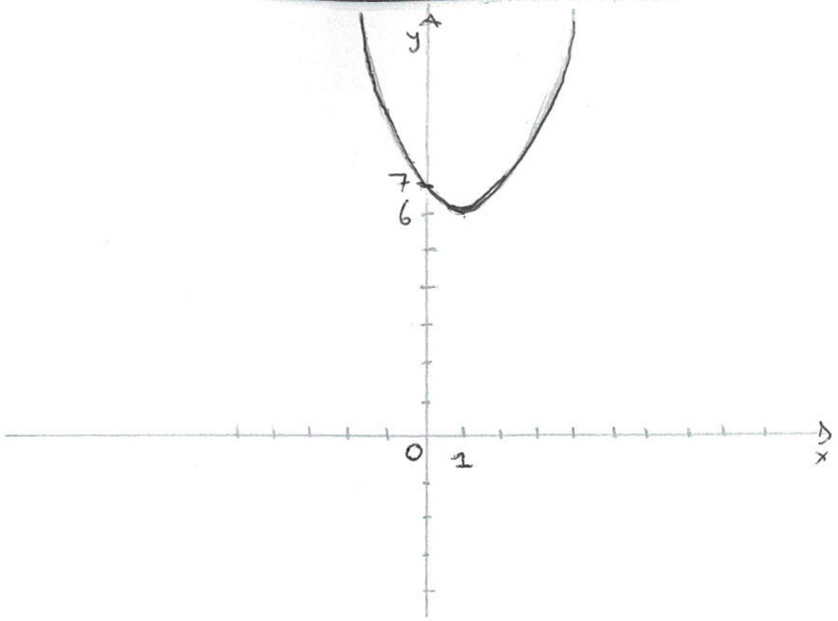
$$\begin{cases} a = c - 6 \\ 4c = 28 \\ b = -2a \end{cases} \quad \begin{cases} a = 7 - 6 \\ c = 7 \\ b = -2a \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 7 \end{cases}$$

La parabola ha equazione $y = x^2 - 2x + 7$

Per disegnarla osserviamo che $a = 1 > 0 \Rightarrow$ funzione concava

il vertice è nel punto $V = (1, 6)$

L'intersezione con l'asse delle ordinate è in $c = 7$



ESERCIZIO 4 Risolvere le seguenti equazioni

a) $8(3-2x)+5(x-2)=10(x-1)+3(2+x)$

b) $4x(2-x)+(x-2)=-11$

a) $8(3-2x)+5(x-2)=10(x-1)+3(2+x)$

$24-16x+5x-10=10x-10+6+3x$

$-16x+5x-10x-3x=-\cancel{10}+6-24+\cancel{10}$

$-24x=-18$

$24x=18$

$x=\dfrac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{24}_{4}}$

$x=\dfrac{3}{4}$

b) $4x(2-x)+(x-2)=-11$

$8x-4x^2+x-2+11=0$

$-4x^2+9x+9=0$

$4x^2-9x-9=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{9\pm\sqrt{81-(-144)}}{8}=\frac{9\pm\sqrt{225}}{8}=\begin{cases}\dfrac{9-15}{8}\\[2mm]\dfrac{9+15}{8}\end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{8}_{\,4}} = -\frac{3}{4}$$

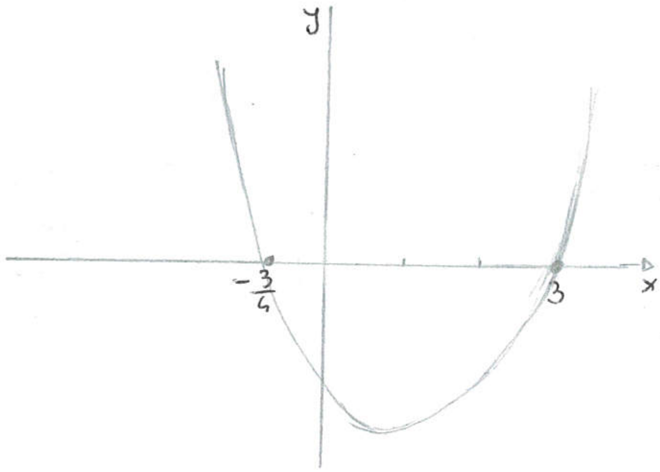
$$x_2 = \frac{\cancel{24}^{\,3}}{\cancel{8}_{\,1}} = 3$$

OSS:

$\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 soluzioni distinte

$$x_1 = -\frac{3}{4} \qquad x_2 = 3$$

Le soluzioni di un'equazione quadratica indicano i punti in cui la parabola associata interseca l'asse delle x.



ESERCIZIO 5 Risolvere le seguenti disequazioni

a) $3x + 7 \leq 2(x-5)$

b) $-x^2 - 3x > x^2 + 5 - (x+3)^2$

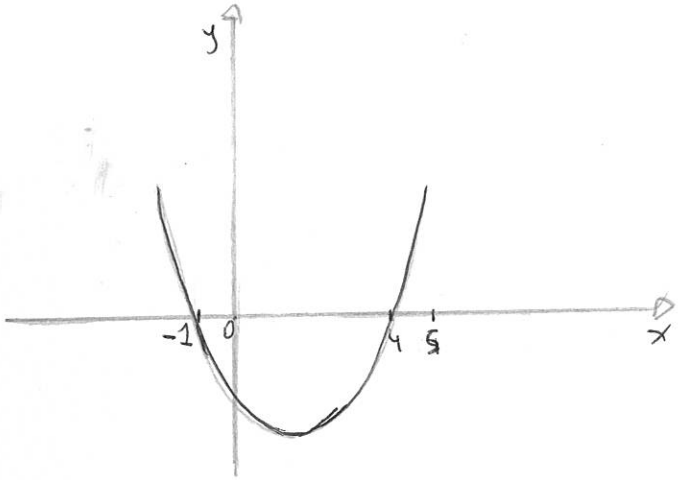
a)
$$3x + 7 \leq 2(x-5)$$
$$3x + 7 \leq 2x - 10$$
$$3x - 2x \leq -10 - 7$$
$$x \leq -17$$

b)
$$-x^2 - 3x > x^2 + 5 - (x+3)^2$$
$$-x^2 - 3x > x^2 + 5 - (x^2 + 6x + 9)$$
$$-x^2 - 3x - \cancel{x^2} - 5 + \cancel{x^2} + 6x + 9 > 0$$
$$-x^2 + 3x + 4 > 0$$
$$x^2 - 3x - 4 < 0$$

Risolviamo l'equazione associata $x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{25}}{2} = \frac{3-5}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \\ \frac{3+\sqrt{25}}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$



$x \in (-1, 4)$

S: $-1 < x < 4$