Matematica

3. Iperboli, equazioni e disequazioni frazionarie

Giuseppe Vittucci Marzetti[1]

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2020-21

[1]Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

1. Iperboli
   - Proporzionalità inversa e iperbole equilatera
   - Funzioni omografiche e iperboli equilatere
2. Equazioni e disequazioni frazionarie
   - Equazioni frazionarie
   - Disequazioni scomponibili in fattori e disequazioni frazionarie

Proporzionalità inversa e iperbole equilatera

- Due grandezze x e y sono legate da **proporzionalità inversa** (sono **inversamente proporzionali**) se il loro prodotto rimane costante:

$$y\,x = a$$

- Es. base e altezza di un rettangolo di area costante.
- Il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

corrisponde ad una **iperbole equilatera** (con centro di simmetria nell'origine degli assi)

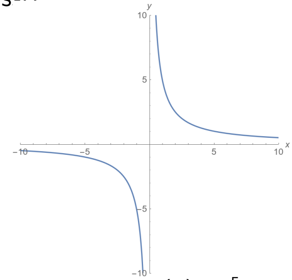


Figura: $f(x) = \frac{5}{x}$

Funzioni omografiche e iperboli equilatere

- Le funzioni del tipo

$$f(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \ ad - bc \neq 0$$

dette **funzioni omografiche**, nel piano sono rappresentate da **iperboli equilatere** con **centro di simmetria** di coordinate:

$$C = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

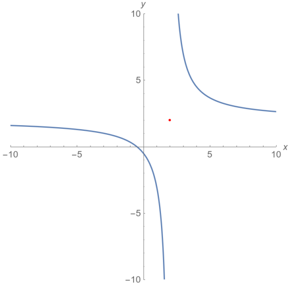
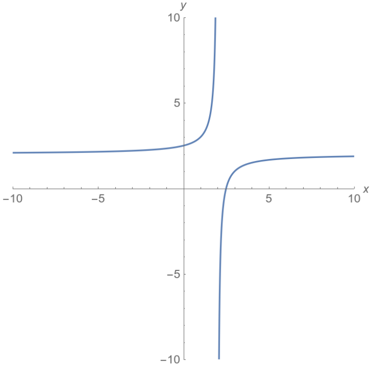


Figura: Parabola equilatera con centro di simmetria di coordinate (2,2)

Disegnare l'iperbole equilatera generata da una particolare funzione omografica

- Consideriamo la funzione: $f(x) = \frac{2x-5}{x-2}$
- Determiniamo
  - le coordinate del centro di simmetria dell'iperbole: $\left(-\frac{-2}{1}, \frac{2}{1}\right) = (2, 2)$
  - il punto di intersezione con l'asse delle ordinate per individuare l'iperbole effettiva: $f(0) = 5/2 = 2,5$



Un esempio economico: la funzione di costo medio

- La funzione di **costo medio** è data dal costo totale (C) diviso per la quantità prodotta (x):

$$f(x) = \frac{C}{x}$$

- Supponendo che il costo totale sia dato dalla seguente funzione della quantità:

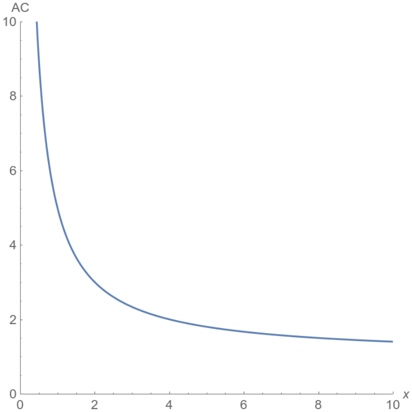
$$C(x) = c\,x + c_f$$

  dove c e c_f sono due costanti positive che rappresentano rispettivamente il costo di ogni unità aggiuntiva e i costi fissi, la funzione dei costi medi sarà:

$$f(x) = \frac{c\,x + c_f}{x} = c + \frac{c_f}{x}$$

- Il grafico associato è un'iperbole equilatera con centro di simmetria $(0, c)$.
- Dei due rami dell'iperbole l'unico rilevante dal punto di vista economico è quello nel primo quadrante $(x > 0, y > 0)$

Un esempio economico: la funzione di costo medio



$$f(x) = 1 + \frac{5}{x}$$

Equazioni frazionarie

- In generale, un'**equazione fratta** (o **equazione frazionaria**) in un'incognita è un'equazione in cui sono presenti rapporti e l'incognita compare almeno una volta in uno dei denominatori.
- Per risolvere le equazioni fratte occorre:
  1. Determinare le **condizioni di esistenza**: considerare tutti i denominatori in cui compare l'incognita x ed escludere dalle possibili soluzioni i valori di x che annullano ciascuno dei denominatori.
  2. Ridurre alla forma normale:
  $$\frac{N(x)}{D(x)} = 0$$
  3. Ridurre ad un'equazione non fratta:
  $$D(x)\frac{N(x)}{D(x)} = 0\,D(x) \qquad \Rightarrow \qquad N(x) = 0$$
  4. Determinare i valori di x che soddisfano l'equazione al punto 3 e le condizioni di esistenza individuate al punto 1.

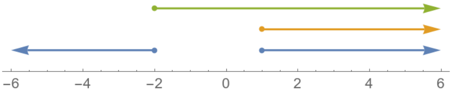
Disequazioni scomponibili in fattori

- Con una disequazione del tipo:

$$f(x) \lesseqgtr 0$$

  se $f(x)$ può essere scomposta in fattori, per risolvere la disequazione può utilizzarsi la **regola dei segni**.
- Precisamente si determina:
  - il segno di ciascuno dei fattori: insieme di positività, insieme di negatività, insieme dei punti ove si annulla;
  - il segno del prodotto.
- Conviene utilizzare opportune rappresentazioni grafiche.
- Esempio:

$$x^2 + x - 2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad (x+2)(x-1) \geq 0$$



Disequazioni frazionarie

- Una **disequazione frazionaria** (o **disequazione fratta**) è una disequazione in cui l'incognita compare al denominatore.
- Per risolvere le disequazioni frazionarie occorre:
  1. Determinare le **condizioni di esistenza**: considerare tutti i denominatori in cui compare l'incognita x ed escludere dalle possibili soluzioni i valori di x che annullano ciascuno dei denominatori.
  2. Ridurre alla forma:
  $$\frac{N(x)}{D(x)} \lesseqgtr 0$$
  3. Studiare separatamente il segno di numeratore e denominatore.
  4. Applicare la **regola dei segni** per determinare l'insieme delle soluzioni rispettando le condizioni di esistenza al punto 1.
- Esempio:

$$\frac{x^2+3x}{x+1} \geq 0$$