Matematica

5. Funzioni, equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

Giuseppe Vittucci Marzetti[1]

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2020-21

[1] Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

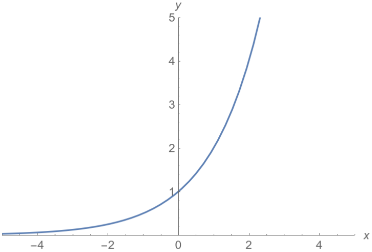
Layout

Funzione esponenziale

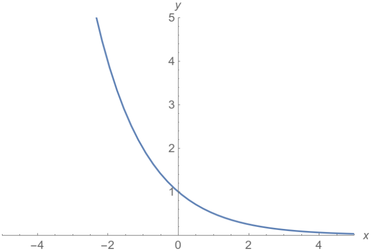
- La **funzione esponenziale** di base a è una funzione del tipo:

$$f(x) = a^x, \qquad a > 0$$

  - Sempre positiva.
  - Definita $\forall x \in \mathbb{R}$.
  - Strettamente convessa.
  - Strettamente crescente (decrescente) se $a > 1$ $(0 < a < 1)$.



(a) $f(x) = 2^x$



(b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Progressione geometrica

- Una **progressione geometrica** (o **successione geometrica**) è una successione di numeri tali che il rapporto tra un elemento e il suo precedente è costante.
- Tale costante è chiamata **ragione della successione**.

$$\begin{aligned} f(1) &= a \cdot f(0) = a \\ f(2) &= a \cdot f(1) = a^2 \\ &\vdots \\ f(x) &= a \cdot f(x-1) = a^x \end{aligned}$$

- Ogni variabile (es. popolazione, PIL, livello generale dei prezzi) con un tasso di variazione costante evolve in progressione geometrica:

$$f(x) = (1+g)^x x_0$$

dove g è una costante maggiore di -1.

Tasso di crescita e crescita geometrica

- Si ha **crescita geometrica** (o **esponenziale**) di una variabile quando il suo tasso di crescita è costante:

$$\frac{\Delta f(t)}{f(t-1)} = \frac{f(t) - f(t-1)}{f(t-1)} = g \qquad f(t) = (1+g)\, f(t-1)$$

- Sostituendo si ha:

$$f(t) = (1+g)\, f(t-1) = (1+g)(1+g)\, f(t-2) = \\ = (1+g)^2\, f(t-2) = \ldots = (1+g)^t\, f(0)$$

- La leggenda indiana della nascita degli scacchi mostra la potenza della crescita geometrica:
  - l'inventore chiese al suo principe per l'invenzione un chicco di riso per la prima casella, due per la seconda, quattro per la terza e così via ($g = 1$), e il principe inopinatamente acconsentì...
  - ...ma solo per l'**ultima casella** il principe doveva:

$$1(1+1)^{63} = 2^{63} = 9.223.372.036.854.775.808 \text{ chicchi}$$

una quantità più grande del raccolto mondiale.

Capitalizzazione semplice

- Supponiamo di prestare nel periodo 0 un **capitale** di valore C_0 (**principal sum**) (es. 1000 euro) al **tasso di interesse** annuo r (es. 10% annuo, ovvero $r = 0,1$).
- Assumiamo altresì che gli interessi ci siano corrisposti una volta l'anno alla fine del periodo di riferimento (**interessi posticipati**).
- Dopo un anno (all'inizio del periodo 1) si avrà:

$$C_1 = C_0 + r\,C_0 = (1 + r)\,C_0.$$

- Nel nostro esempio, prestati al tasso di interesse annuo del 10% 1000 euro dopo un anno diventano 1100 euro.
- In regime di **capitalizzazione semplice** (**simple interest**), in cui è solo il capitale iniziale a fruttare interessi, dopo t anni si avrà:

$$C_t = C_0 + t\,r\,C_0 = C_0(1 + r\,t)$$

- Nel nostro esempio, prestati a un tasso di interesse annuo costante del 10%, con interesse semplice, dopo 20 anni i nostri 1000 euro saranno diventati 3 000 euro $(1\,000 \times (1 + 20 \times 0,1))$.

Capitalizzazione composta

- In regime di **capitalizzazione composta** (**compound interest**), in cui gli interessi maturati vengono via via aggiunti al capitale e fruttano anche loro interessi, dopo t anni si avrà:

$$C_t = (1+r)C_{t-1} = (1+r)^2 C_{t-2} = \ldots = (1+r)^t C_0.$$

- Nel nostro esempio, prestati a un tasso di interesse annuo costante del 10%, con interesse composto dopo 20 anni i nostri 1000 euro saranno diventati circa 6727,5 euro ($1000 \times 1,1^{20}$).

Capitalizzazione frazionata

- Se l'interesse annuo r è pagato semestralmente in due tranche (ognuna della metà del valore) e imputato a capitale si ha:

$$C_t = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t} C_0$$

- In generale, supponendo che l'interesse annuale r venga corrisposto in m frazioni costanti durante il corso dell'anno e subito imputato a capitale si ha:

$$C_t = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} C_0$$

- Questa è la cosiddetta **capitalizzazione frazionata**.

Capitalizzazione continua

- Quando la frequenza m tende a infinito (la capitalizzazione degli interessi avviene istante per istante, in modo continuo) si ha il caso di **capitalizzazione continua**:

$$C_t = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} C_0$$

- Uno dei **limiti notevoli** è:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}$$

dove e è il cosiddetto **numero di Eulero** (o **di Nepero**), numero irrazionale uguale a circa 2,7183.

- Utilizzando il precedente limite notevole si deriva:

$$C_t = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} C_0 = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right)^{rt} C_0 = \mathrm{e}^{rt} C_0$$

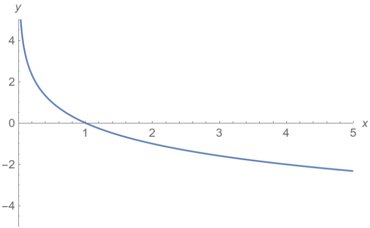
Funzione logaritmica

- La **funzione logaritmica** è la funzione inversa di quella esponenziale:

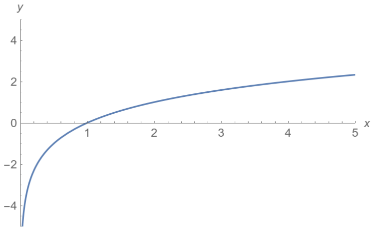
$$y = \log_a x \qquad \leftrightarrow \qquad x = a^y$$

- Il logaritmo in **base** a di x (con $a > 0$ e $a \neq 1$) identifica il valore y a cui elevare la base a per ottenere l'**argomento** x.
- Come nel caso dell'esponenziale vanno distinti i casi:

$$0 < a < 1 \qquad\qquad a > 1$$

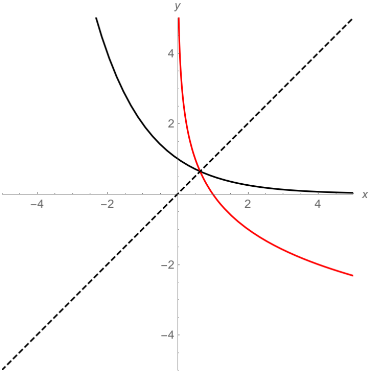


(a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

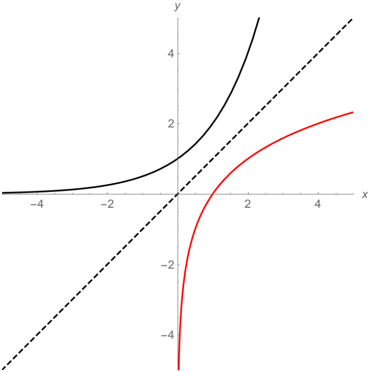


(b) $f(x) = \log_2 x$

Funzione esponenziale e logaritmica

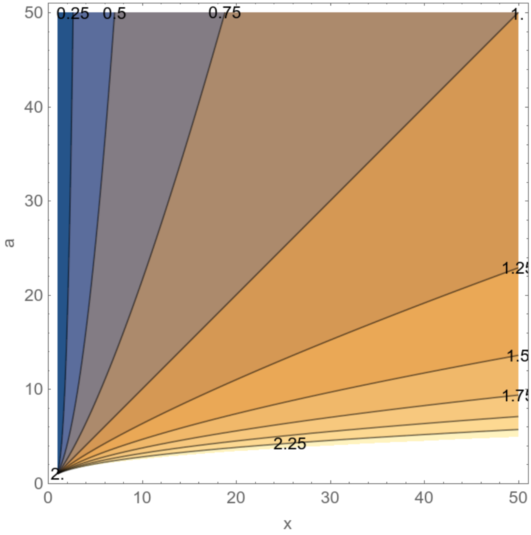


(a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (nera) e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (rossa)



(b) $y = 2^x$ (nera) e $y = \log_2 x$ (rossa)

Valore di $\log_a x$ per diversi valori di a (> 1) e x (> 0)

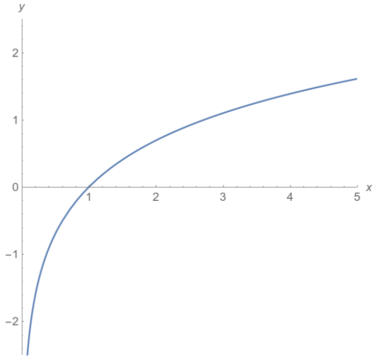


Logaritmo naturale

Il **logaritmo naturale** è il logaritmo in base e:

$$f(x) = \log_{\mathrm{e}} x = \ln x$$

dove e è il numero di Nepero.



Proprietà dei logaritmi

- Essendo il logaritmo la funzione inversa dell'esponenziale (e quindi l'esponenziale la funzione inversa del logaritmo) si ha:

$$x = \log_a a^x = a^{\log_a x}$$

- Ricordando che il logaritmo è definito solo per valori strettamente positivi dell'argomento, per i logaritmi valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \log_a(x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \\ \log_a x^k &= k \log_a x \\ \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a} \end{aligned}$$

Dimostrazioni delle proprietà dei logaritmi

- Logaritmo di un prodotto uguale alla somma dei logaritmi:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^m \cdot a^n) = \log_a a^{m+n} = m + n = \log_a x + \log_a y$$

- Dimostrazione della formula del cambio di base:

$$\begin{aligned} x &= x \\ a^{\log_a x} &= b^{\log_b x} \\ \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} &= b^{\log_b x} \\ b^{\log_b a \cdot \log_a x} &= b^{\log_b x} \\ \log_b a \cdot \log_a x &= \log_b x \\ \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a} \end{aligned}$$

Equazioni esponenziali

- Le **equazioni esponenziali** sono equazioni in cui compaiono funzioni esponenziali e in cui l'incognita compare in almeno un esponente.
- I metodi di risoluzione sono vari e possono essere classificati in base alla forma normale a cui può essere ricondotta l'equazione.
  - Equazioni esponenziali elementari.
  - Equazioni esponenziali con termine noto esponenziale e con incognita.
  - Equazioni esponenziali per sostituzione.
  - Equazioni esponenziali con il metodo grafico.
  - Equazioni esponenziali con base variabile.

Equazioni esponenziali elementari

- Le **equazioni esponenziali elementari** sono quelle riconducibili alla forma normale:
$$a^{f(x)} = b, \qquad\qquad a > 0,\ a \neq 1$$
- Con
    - $b \leq 0$, l'equazione non ha soluzioni.
    - $b > 0$, l'equazione è determinata. Per ricavare la soluzione è sufficiente applicare il logaritmo ad entrambi i membri:
    $$f(x) = \log_a b$$
    - Esempio:
    $$\begin{aligned} 10^{2x^2} &= 5 \\ 2x^2 &= \log_{10} 5 \\ x^2 &= \frac{\log_{10} 5}{2} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{\log_{10} 5}{2}} \approx \pm 0,591 \end{aligned}$$

Equazioni esponenziali elementari: esempio

- Calcolare il tempo t necessario affinché una quantità c ($c > 0$) che cresce in modo esponenziale al tasso g ($g > 0$) (es. popolazione, malati, ricavi, produzione, capitale, ecc.) raddoppi.

$$c(1+g)^t = 2c$$
$$(1+g)^t = 2$$
$$t = \log_{1+g} 2 = \frac{\ln 2}{\ln(1+g)}$$

- Con g positivo ma relativamente piccolo ($g \leq 0,05$) si ha $\ln(1+g) \approx g$, da cui:

$$t \approx \frac{\ln 2}{g} \approx \frac{0,7}{g} = \frac{70}{g\%}$$

quindi, quando g è espresso in termini percentuali (es. la popolazione mondiale cresce al 2% annuo), per ottenere in modo approssimato il numero di periodi necessari al raddoppio è sufficiente dividere 70 per il tasso di crescita (es. $70/2 = 35$ anni).

Equazioni esponenziali con termine noto esponenziale e con incognita

- Le **equazioni esponenziali con termine noto esponenziale e con incognita** sono quelle riconducibili alla forma normale:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}, \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$$

- Per ricavare la soluzione è sufficiente:
  1. applicare il logaritmo ad entrambi i membri;
  2. utilizzare la formula del cambio di base.

$$\begin{aligned} \log_a a^{f(x)} &= \log_a b^{g(x)} \\ f(x) &= \frac{\log_b b^{g(x)}}{\log_b a} \\ f(x) &= \frac{1}{\log_b a} g(x) \end{aligned}$$

Equazioni esponenziali con termine noto esponenziale e con incognita: esempio

- Esempio:

$$2^{3x} = 3^{x+1}$$

- Per risolvere occorre applicare il logaritmo a entrambi i membri:

$$\log_2 2^{3x} = \log_2 3^{x+1}$$

- Applicare la regola del cambio di base:

$$3x = \frac{\log_3 3^{x+1}}{\log_3 2}$$

$$3x = \frac{x+1}{\log_3 2}$$

- Risolvere l'equazione:

$$(3\log_3 2 - 1)x = 1$$

$$x = \frac{1}{3\log_3 2 - 1} = \frac{1}{\log_3 \frac{8}{3}} \approx 1,12$$

Equazioni esponenziali per sostituzione

- Nelle **equazioni esponenziali per sostituzione** non si ha una specifica forma normale di riferimento.
- Il metodo di sostituzione prevede di sostituire il termine esponenziale ripetuto con una nuova incognita, in modo da ricondurre l'equazione ad uno dei casi noti.
- Esempio:
$$-2^x + 4^{x-\frac{1}{2}} - 4 = 0$$
$$-2^x + (2^2)^{x-\frac{1}{2}} - 4 = 0$$
$$-2^x + \frac{(2^x)^2}{2} - 4 = 0$$
- Sostituendo $y = 2^x$ abbiamo:
$$y^2 - 2y - 8 = 0$$
$$y_1 = -2, \;\; y_2 = 4$$
- Le due equazioni esponenziali associate $(2^x = y_{1,2})$ danno come soluzione: $x = \log_2 4 = 2$.

Equazioni esponenziali con il metodo grafico

- Data un'equazione della forma:

$$a^{f(x)} = g(x)$$

  in cui l'incognita non compare solo all'esponente, l'unico metodo per avere un'idea delle soluzioni è il metodo grafico.

- Occorre scrivere l'equazione come un sistema:

$$\begin{cases} y = a^{f(x)} \\ y = g(x) \end{cases}$$

  e tracciare i grafici delle due curve.

- Le ascisse dei punti di intersezione delle due curve costituiscono le soluzioni dell'equazione.

Equazioni esponenziali con base variabile

- Nelle **equazioni esponenziali con basi variabili** compaiono termini della forma
$$[f(x)]^{g(x)}$$
- Il metodo di risoluzione consiste in:
  - imporre le condizioni di esistenza relative all'esponenziale con base variabile:
$$f(x) > 0$$
  - sfruttare la relazione tra logaritmo ed esponenziale:
$$[f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\ln\left([f(x)]^{g(x)}\right)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$$

Disequazioni esponenziali

- La classificazione delle **disequazioni esponenziali** e i relativi metodi di soluzione sono analoghi a quelli delle equazioni esponenziali.
- NB: se la **base è compresa tra 0 ed 1**, la funzione esponenziale è strettamente decrescente e il **verso della disequazione va cambiato**.
- Esempio. Nel risolvere la seguente disequazione

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$$

  - se $a > 1$, è sufficiente risolvere la disequazione: $f(x) \geq g(x)$.
  - se $0 < a < 1$, è necessario cambiare il verso e risolvere la disequazione: $f(x) \leq g(x)$.

Equazioni logaritmiche

- Le **equazioni logaritmiche** sono equazioni in cui l'incognita compare almeno una volta nell'argomento o nella base di un logaritmo.
- La classificazione dei metodi di risoluzione è analoga a quella delle equazioni esponenziali:
  - equazioni logaritmiche elementari: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$;
  - equazioni logaritmiche risolvibili con il passaggio all'esponenziale: $\log_a f(x) = b$;
  - equazioni logaritmiche risolvibili per sostituzione;
  - equazioni logaritmiche risolvibili con il metodo grafico;
  - equazioni logaritmiche con incognita nella base.
- In linea generale dobbiamo:
  - imporre le condizioni di esistenza:
    - argomento del logaritmo positivo;
    - base del logaritmo positiva e diversa da 1.
  - ricondursi a una forma nota e applicare il metodo risolutivo adatto.
  - stabilire se le soluzioni ottenute sono accettabili.

Disequazioni logaritmiche

- Le **disequazioni logaritmiche** sono disequazioni in cui l'incognita compare come argomento di un logaritmo.
- I casi principali sono quelli che possono essere ricondotti alle seguenti due forme normali:

$$\log_a f(x) \gtreqless c \tag{1}$$

$$\log_a f(x) \gtreqless \log_b g(x) \tag{2}$$

Primo tipo di disequazione logaritmica

- Disequazione logaritmica riconducibile alla forma normale:

$$\log_a f(x) \gtreqless c$$

- Ponendo la disequazione e le condizioni di esistenza a sistema e ricordando che $c = \log_a a^c$, per risolverla occorre risolvere il sistema:
  - con $a > 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \gtreqless a^c \end{cases}$$

  - con $0 < a < 1$ (il verso della seconda disequazione va invertito):

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \lesseqgtr a^c \end{cases}$$

- Caso particolare è quello in cui $c = 0$, da cui segue che $a^c = 1$.

Secondo tipo di disequazione logaritmica

- Disequazione logaritmica riconducibile alla forma normale:

$$\log_a f(x) \gtreqless \log_b g(x)$$

- Ponendo la disequazione e le condizioni di esistenza a sistema si ha:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \log_a f(x) \gtreqless \log_b g(x) \end{cases}$$

- Utilizzando la regola del cambio di base e le proprietà dei logaritmi, l'ultima disequazione nel sistema può essere ricondotta alla forma:

$$\log_a f(x) \gtreqless \log_a \left[g(x)^{\frac{1}{\log_a b}} \right]$$

Secondo tipo di disequazione logaritmica

- Vanno distinti i casi in cui:
  - con $a > 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \gtreqless g(x)^{\frac{1}{\log_a b}} \end{cases}$$

  - con $0 < a < 1$ il verso della seconda disequazione va invertito:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \lesseqgtr g(x)^{\frac{1}{\log_a b}} \end{cases}$$