Matematica
Esempio esame – Unità 1-6

Giuseppe Vittucci Marzetti*

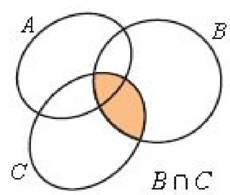
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

Novembre 2018

1. *Esercizio.* Considera tre insiemi, A, B e C, non *disgiunti* e tali che $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. Utilizzando i *diagrammi di Venn* mostra:

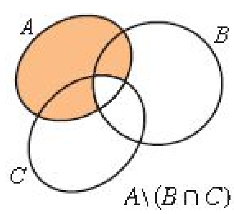
   (a) (1 punto) $B \cap C$

   Soluzione



   (b) (1 punto) $A \backslash (B \cap C)$

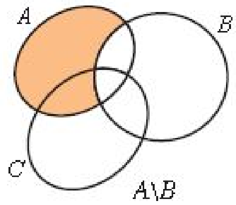
   Soluzione



   (c) (1 punto) $A \backslash B$

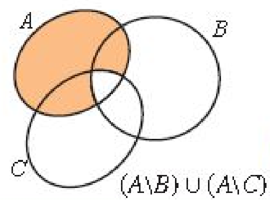
*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Soluzione



(d) (1 punto) $(A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

Soluzione



2. (3 punti) *Esercizio.* Stabilire se la funzione reale di variabile reale:

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

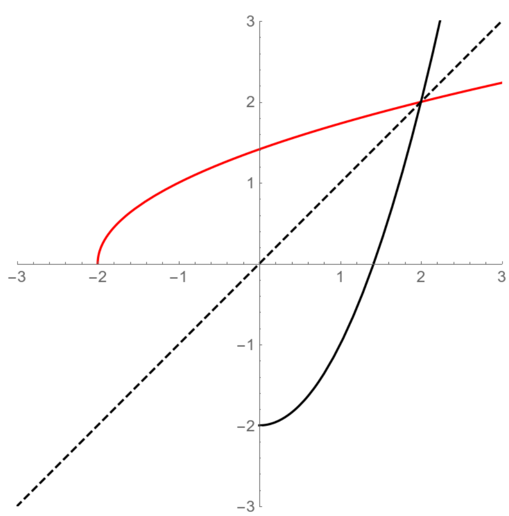
è *iniettiva* nel suo insieme di definizione e, in caso affermativo, determinarne l'inversa e disegnare il grafico delle due funzioni.

Soluzione La funzione risulta definita nell'insieme dei numeri reali solo se $x \geq -2$. Nel suo insieme di definizione A, la funzione è iniettiva, si ha infatti che, $\forall\, x_1, x_2 \in A:\ x_1 \neq x_2$, segue che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Esiste pertanto la funzione inversa. Questa avrà come dominio l'insieme dei numeri reali positivi. Scrivo $f(y) = x$ ed esplicito rispetto alla y, indicando il dominio della funzione:

$$y = x^2 - 2 \qquad\qquad x \geq 0$$

Il grafico delle due funzioni, $f(x)$ (rosso) e $f^{-1}(x)$ (nero), è mostrato qui sotto.



3. (2 punti) *Esercizio.* Data la funzione $f : A \subseteq \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$:

$$f(x) = x^2$$

determinare, se possibile, la funzione composta $f[f(x)]$.

Soluzione Notiamo innanzitutto che dominio e immagine soddisfano la relazione $Im(f) \subseteq Dom(f)$, per cui è possibile procedere con la composizione.

La funzione composta sarà data da:

$$f[f(x)] = (x^2)^2 = x^4$$

4. *Esercizio.*

(a) (3 punti) Determina l'equazione della *parabola* (con asse di simmetria parallelo all'asse y) passante per il punto di coordinate $(x_1, y_1) = (1, 0)$ ed avente *vertice* nel punto di coordinate $(x_2, y_2) = (4, -9)$ e disegna il grafico della funzione.

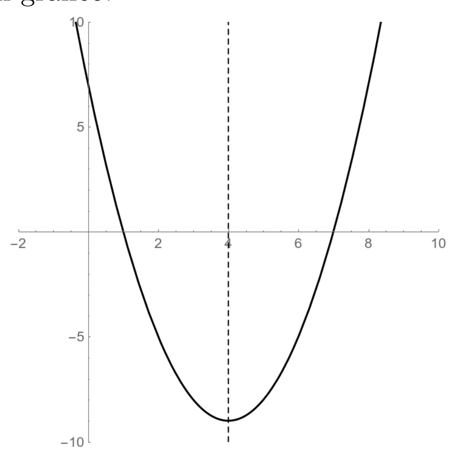
Soluzione Per determinare tale punto bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} a\,x_1^2 + b\,x_1 + c = y_1 \\ a\,x_2^2 + b\,x_2 + c = y_2 \\ -b = x_2\,2a \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 16\,a + 4\,b + c = -9 \\ b = -8\,a \end{cases}$$

risolvendo il sistema per sostituzione si ottiene: $a = 1$, $b = -8$, $c = 7$. L'equazione della parabola è pertanto:

$$y = x^2 - 8x + 7$$

La figura sotto ne mostra il grafico.



(b) (2 punti) Calcola le *radici* reali (o *zeri*) dell'*equazione di secondo grado* individuata al punto (a).

Soluzione Per individuare le radici occorre risolvere la seguente equazione:

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

da cui, applicando la formula risolutiva si ottiene:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1} = \frac{8 \pm 6}{2} = 4 \pm 3$$

L'equazione ammette pertanto due radici reali distinte: $x_1 = 1$, $x_2 = 7$.

(c) (3 punti) Sia $f(x)$ la funzione reale di variabile reale identificata dall'equazione della parabola individuata al punto (a). Definisci la funzione $|f(x)|$ e disegnane il grafico.

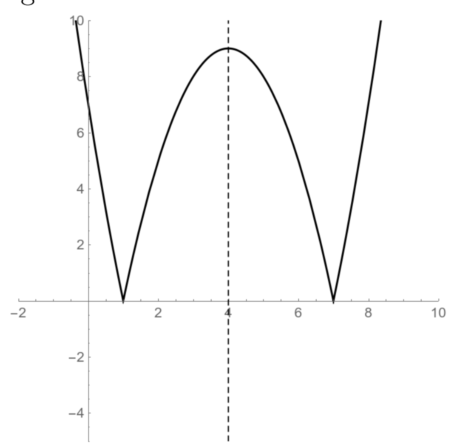
Soluzione Essendo $f(x) = x^2 - 8x + 7$, la funzione $|f(x)|$ sarà data da:

$$|f(x)| = \begin{cases} x^2 - 8x + 7 & \text{se } x^2 - 8x + 7 \geq 0 \\ -x^2 + 8x - 7 & \text{se } x^2 - 8x + 7 < 0 \end{cases}$$

da cui:

$$|f(x)| = \begin{cases} x^2 - 8x + 7 & \text{se } x \in (-\infty, 1] \cup [7, +\infty) \\ -x^2 + 8x - 7 & \text{se } x \in (1, 7) \end{cases}$$

La figura sotto ne mostra il grafico.



(d) (3 punti) Considerando la funzione definita al punto precedente, risolvi la seguente *disequazione con valore assoluto*:

$$|f(x)| < 5$$

e mostra le soluzioni nel grafico precedente.

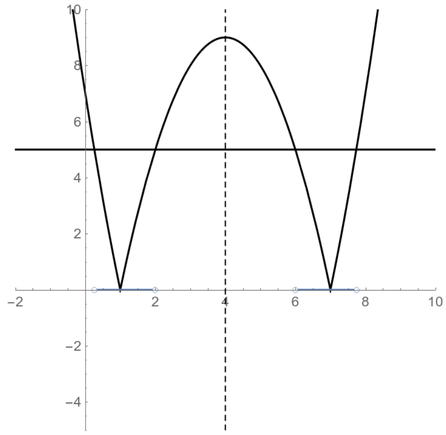
Soluzione La disequazione con valore assoluto avrà soluzioni per quei valori di x che soddisfano la seguente disequazione:

$$-5 < x^2 - 8x + 7 < 5$$

o, scritto altrimenti

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 12 > 0 \\ x^2 - 8x + 2 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2 \lor x > 6 \\ 4 - \sqrt{14} < x < 4 + \sqrt{14} \end{cases}$$

le soluzioni sono pertanto $x \in (4 - \sqrt{14}, 2) \ \cup \ (6, 4 + \sqrt{14})$.
La figura sotto mostra l'insieme delle soluzioni nel grafico precedente.



5. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale ($f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$).

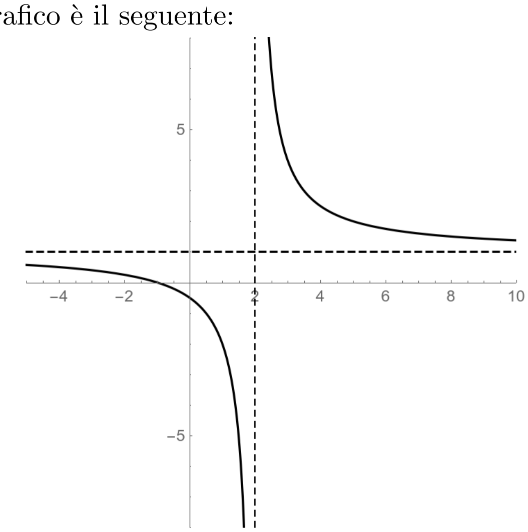
$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

(a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione.

Soluzione La funzione sarà definita per ogni valore reale di x che non rende nullo il denominatore, per cui l'insieme di definizione risulta $x \in \mathcal{R} \backslash \{2\}$.

(b) (3 punti) Disegna il grafico della funzione.

Soluzione La funzione appartiene alla classe delle funzioni omografiche, rappresentate nel piano da iperboli equilatere. In questo caso il centro di simmetria dell'iperbole ha coordinate: $(2, 1)$. Il grafico è il seguente:



(c) (3 punti) Calcola i valori di x per cui i valori restituiti da $f(x)$ siano maggiori o uguali a 2, ovvero:

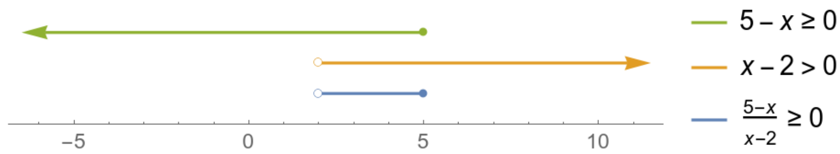
$$\frac{x+1}{x-2} \geq 2$$

e individua l'insieme delle soluzioni nel grafico al punto precedente.

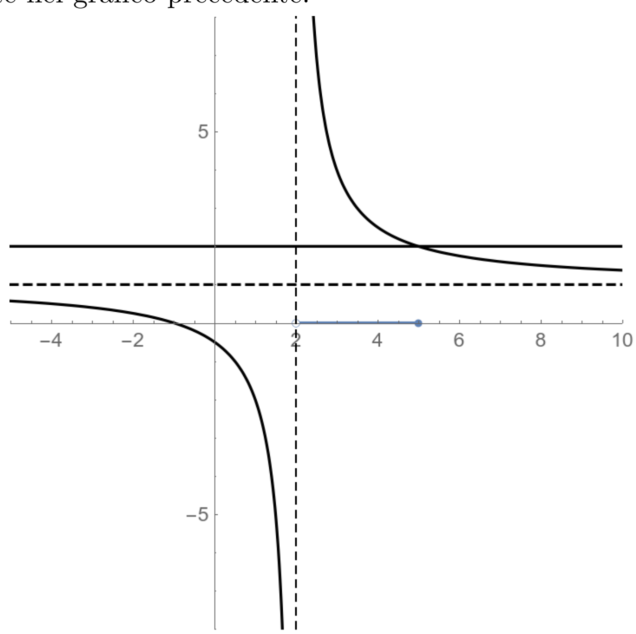
Soluzione Questa è una disequazione fratta (o frazionaria). La condizione di esistenza è $x \neq 2$. Riducendo alla forma normale la disequazione si ottiene:

$$\frac{x+1}{x-2} - 2 \geq 0 \qquad \frac{x+1-2(x-2)}{x-2} \geq 0 \qquad \frac{5-x}{x-2} \geq 0$$

Studiando separatamente il segno di numeratore e denominatore ed applicando la regola dei segni, si ottiene l'insieme delle soluzioni.



La disequazione è soddisfatta per ogni $x \in (2, 5]$. La figura sotto mostra l'insieme delle soluzioni individuate nel grafico precedente.

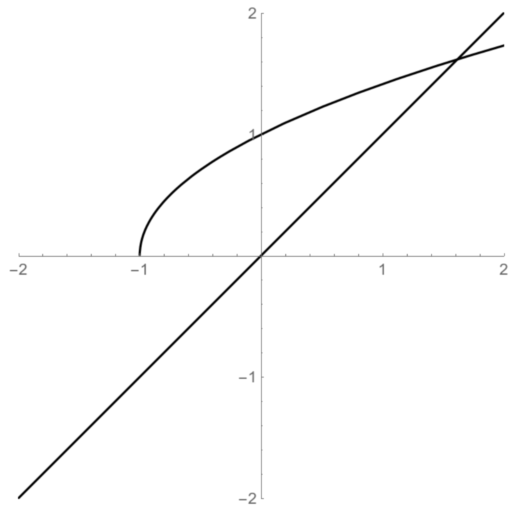


6. *Esercizio.*

(a) (2 punti) Disegna su uno stesso piano cartesiano i grafici delle funzioni:

$$y = x$$
$$y = \sqrt{x+1}$$

Soluzione



(b) (3 punti) Risolvi la seguente *disequazione irrazionale*:

$$x < \sqrt{x+1}$$

Soluzione La forma normale della disequazione è:

$$\sqrt{x+1} > x$$

L'indice della radice (2) è un numero pari, per cui le soluzioni della disequazione saranno individuate dall'unione di due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+1 > x^2 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 1 < 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \cup \quad -1 \leq x < 0$$

La disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

7. (3 punti) *Esercizio.* Risolvi la seguente *equazione logaritmica*:

$$\log_2(2-x) = \log_{\frac{1}{2}}(1+x)$$

Soluzione Le condizioni di esistenza richiedono che gli argomenti dei logaritmi siano positivi:

$$\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 1 + x > 0 \end{cases}$$

per cui $x \in (-1, 2)$.

Applicando la regola del cambio di base l'equazione può riscriversi come:

$$\begin{aligned} \log_2(2-x) &= \frac{\log_2(1+x)}{\log_2 \frac{1}{2}} \\ \log_2(2-x) &= -\log_2(1+x) \\ \log_2(2-x) &= \log_2 \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} 2-x &= \frac{1}{1+x} \\ \frac{(1+x)(2-x)-1}{1+x} &= 0 \\ \frac{-x^2+x+1}{1+x} &= 0 \end{aligned}$$

Data la condizione di esistenza ($x \neq -1$), l'equazione è soddisfatta se:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

da cui $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Entrambe le soluzioni sono accettabili essendo comprese tra -1 e 2.

8. (3 punti) *Problema.* Supponi che i ricavi della tua società siano aumentati del 50% in 11 anni. Calcola il tasso di crescita annuale (g) sotto l'ipotesi che questo sia rimasto costante nel corso di questi anni (i ricavi sono cresciuti di una percentuale costante ogni anno).

   Soluzione Il tasso di crescita annuale è ottenuto risolvendo la seguente equazione:

$$\begin{aligned} (1+g)^{11} &= 1,5 \\ 1+g &= \sqrt[11]{1,5} \\ g &= \sqrt[11]{1,5} - 1 \approx 0,0375 \end{aligned}$$

   Il tasso di crescita annuale che genera un aumento del 50% in 11 anni è il 3,75% circa.

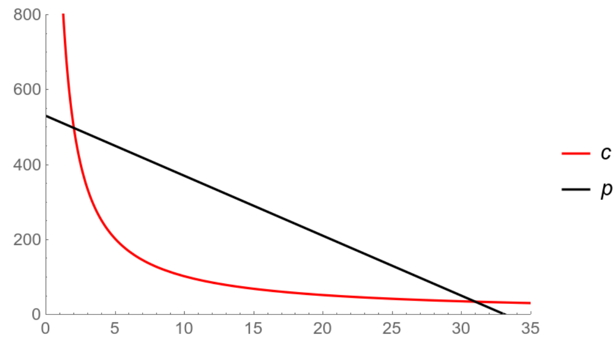
9. *Problema.* Supponi che i costi che la tua società affronta per produrre un determinato prodotto abbiano una componente fissa (che non dipende dalla produzione), pari a 1000 euro al mese, e una componente variabile, pari a 2 euro per ogni unità prodotta.

   Inoltre, assumi che il prezzo a cui riesci a vendere i tuoi prodotti (p) sia una funzione decrescente della quantità. In particolare, assumi che il prezzo decresca linearmente con la quantità venduta mensilmente (x) secondo questa relazione:

$$p(x) = 530 - 16x$$

(a) (3 punti) Rappresenta graficamente sullo stesso piano il costo per unità – il costo medio, c – in funzione delle unità prodotte (x) e il prezzo di vendita (p) sempre in funzione delle unità prodotte.

Soluzione



(b) (3 punti) Calcola il numero di unità che l'impresa deve produrre per non andare in perdita.

Soluzione Per non andare in perdita, il numero di unità prodotte deve essere tale che il prezzo di vendita sia non minore del costo medio:

$$530 - 16x \geq \frac{1000 + 2x}{x}$$

Si tratta di una disequazione frazionaria (con condizione di esistenza $x \neq 0$) che, ricondotta alla forma normale, diventa:

$$\frac{16x^2 - 528x + 1000}{x} \leq 0$$

Questa disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \left[\frac{33-\sqrt{839}}{2}, \frac{33+\sqrt{839}}{2}\right]$. Escludendo la possibilità che l'impresa possa produrre frazioni di unità, l'impresa deve produrre più di 2 unità e non più di 30 unità.

10. *Problema.* Supponi che in un piccolo paese risiedano 15 mila persone. Qual è il tempo necessario perché la popolazione si dimezzi se ogni anno il numero di residenti nel paese diminuisce:

(a) (3 punti) di 150 persone?

Soluzione Il numero di anni t è dato dalla soluzione della seguente equazione lineare:

$$\begin{aligned} 15.000 - 150\,t &= \frac{15.000}{2} \\ 100 - t &= 50 \\ t &= 50 \end{aligned}$$

(b) (3 punti) del 2%?

Soluzione Il numero di anni t è dato dalla soluzione della seguente equazione esponenziale:

$$\begin{aligned}
15.000\,(1-0,02)^t &= \frac{15.000}{2} \\
(1-0,02)^t &= \frac{1}{2} \\
t &= \log_{(1-0,02)}\frac{1}{2} = \frac{-\ln 2}{\ln(1-0,02)} \approx \frac{-0,7}{-0,02} = 35
\end{aligned}$$

11. (3 punti) *Problema.* Assumi che le tue entrate siano attualmente il doppio delle tue uscite. Se si assume che ogni anno le entrate diminuiscono del 3%, mentre le uscite aumentano del 1%, dopo quanti anni le uscite supereranno le entrate?

Soluzione Il problema si risolve impostando la seguente disequazione esponenziale:

$$\begin{aligned}
(1+0,01)^t C &> (1-0,03)^t 2C \\
1,01^t &> 2\cdot 0,97^t \\
\left(\frac{1,01}{0,97}\right)^t &> 2 \\
t &> \log_{\frac{1,01}{0,97}} 2 \approx 17,15
\end{aligned}$$

Le uscite cominceranno a superare le entrate dopo 17 anni.

12. (3 punti) *Problema.* Prima della partita Gianni aveva il triplo delle figurine di Lisa. Durante la partita, Gianni ha perso 2/3 delle sue figurine a favore di Lisa, e alla fine il numero delle figurine di Lisa supera di 12 il numero delle figurine di Gianni. Calcola il numero di figurine a disposizione di Gianni e Lisa prima della partita.

Soluzione Indicando con x il numero di figurine di Lisa prima della partita, $3x$ è il numero di figurine a disposizione di Gianni prima della partita.

Avendo Gianni perso 2/3 delle sue figurine a favore di Lisa, il numero di figurine a disposizione di Gianni dopo la partita è $\frac{3x}{3} = x$, mentre quelle a disposizione di Lisa sono $x + \frac{2}{3}\cdot 3x = 3x$.

Poiché il numero delle figurine di Lisa dopo la partita supera di 12 il numero delle figurine di Gianni, si ha:

$$\begin{aligned}
x+12 &= 3x \\
2x &= 12 \\
x &= 6
\end{aligned}$$

Quindi Lisa aveva 6 figurine prima della partita, mentre Gianni 18.