

ESERCIZIO 1

- a) In quanti modi diversi 9 persone possono sedersi in 4 posti?
- b) Quanti numeri di 4 cifre diverse si possono fare con le 10 cifre decimali (da 0 a 9)?
- c) Calcolare quanti sono i numeri di quattro cifre, tutte tra loro diverse, divisibili per 5.
- a) Poiché le persone sono uniche, quindi non possono ripetersi, e l'ordine conta, visto che dobbiamo considerare i modi diversi in cui le persone possono sedersi, si tratta di disposizioni semplici di 9 elementi di classe 4

Il numero $D_{n,k}$ delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k è dato dal seguente prodotto di k numeri interi positivi

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Nel nostro caso:

$$D_{9,4} = 9(9-1)(9-2)(9-4+1) = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

$$\text{Analogamente } D_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 3024$$

b) Prima di tutto bisogna tener conto del fatto che i numeri non possono iniziare con 0, dunque al totale dovremo sottrarre tutti i gruppi di cifre che iniziano con 0.

Osserviamo che si tratta di disposizioni poiché i gruppi sono diversi (1234 e diverso da 4321 anche se hanno le stesse cifre), senza ripetizione (il testo dice 4 cifre diverse).

Troviamo quindi le disposizioni semplici di 10 elementi di classe 4

$$D_{10,4} = 10(10-1)(10-2)(10-4+1) = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

Troviamo ora le disposizioni di 9 elementi di classe 3 (cioè tutti i numeri di 4 cifre in cui la prima è occupata dallo 0, che non si può ripetere e dunque nei restanti 3 posti avremo solo le cifre da 1 a 9)

$$D_{9,3} = 9(9-1)(9-3+1) = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

Dunque la soluzione è

$$N = D_{10,4} - D_{9,3} = 5040 - 504 = 4536$$

c) Si tratta anche in questo caso di disposizioni semplici

Ricordiamo che un numero è divisibile per 5 se l'ultima cifra, quella delle unità è zero oppure 5. Se l'ultima cifra è zero la prima la posso scegliere in 9 modi diversi, la seconda in 8 e la terza in 7, Dunque i numeri di quattro cifre tra loro diverse che terminano con zero sono:

$$D_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 504$$

se l'ultima cifra è cinque, allora la prima la posso scegliere in 8 modi diversi (non posso considerare lo zero altrimenti non avrò più un numero di quattro cifre), la seconda in 8 modi diversi e infine la terza in 7.

Dunque i numeri di quattro cifre diverse che terminano con cinque sono

$$D_{8,1} \cdot D_{8,2} = 8 \times 8(8-2+1) = 8 \times 8 \times 7 = 448$$

Sommando si ottiene il numero desiderato

$$N = D_{9,3} + D_{8,1} \cdot D_{8,2} = 504 + 448 = 952$$

ESERCIZIO 2

- Calcolare il numero delle permutazioni dei colori dell'arcobaleno.
- Calcolare quanti numeri di 5 cifre distinti si

possono formare con le cifre 1, 3, 5, 7, 9 -

c) Calcolare il numero di possibili anagrammi della parola "numero".

d) Mauro ha 15 libri di Analisi, 15 di geometria e 6 di storia della Matematica - Calcolare in quanti modi può allinearli su uno scaffale -
calcolare poi in quanti modi può allinearli su uno scaffale in modo che i libri di uno stesso argomento siano vicini -

a) Dobbiamo considerare una permutazione dei 7 colori dell'arcobaleno, ricordiamo infatti che le permutazioni semplici di n oggetti sono gli allineamenti che si possono formare considerando ogni volta tutti gli oggetti dati senza ripetizione

$$P_n = D_n, n = n!$$

Nel nostro caso il numero delle permutazioni dei colori dell'arcobaleno è dato da

$$P_7 = D_{7,7} = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

b) Per calcolare il numero dei numeri di 5 cifre distinte che si possono formare con le cifre 1, 3, 5, 7, 9 dobbiamo considerare una

permutazione delle 5 cifre

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

c) Poiché la parola "NUMERO" è costituita da lettere tutte distinte tra loro, per calcolare il numero dei possibili anagrammi è sufficiente calcolare il numero di permutazioni delle 6 lettere che costituiscono la parola

$$P_6 = D_{6,6} = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

d) Marco ha $15 + 15 + 6 = 36$ libri che può allineare su uno scaffale in $36!$ modi diversi, cioè

$$P_{36} = 36!$$

Calcoliamo ora in quanti modi può allinearsi su uno scaffale in modo che quelli di uno stesso argomento siano vicini -

Sappiamo che i 15 libri di Analisi possono essere ordinati in $15!$ modi diversi, quelli di Geometria in $15!$ modi diversi e quelli di Storia della Matematica in $6!$ modi diversi -

Infine Marco deve decidere come ordinare i tre gruppi (per esempio, prima Analisi, poi Geometria e infine Storia della Matematica) e

lo può fare in $3!$ modi diversi.

In totale Mauro può disporre i suoi libri in

$$P_{15} \cdot P_{15} \cdot P_6 \cdot P_3 = 15! \cdot 15! \cdot 6! \cdot 3!$$

modi diversi.

ESERCIZIO 3

- a) Calcolare quanti Terni si possono (potenzialmente) estrarre da un'urna che contiene i 90 numeri del lotto.
- b) In un'azienda vi sono 25 operai e 10 impiegati. Si vuole formare un comitato composto da 2 impiegati e 4 operai. In quanti modi si può formare il comitato?
- c) Quante sono le diagonali di un poligono di n lati?
- d) Quante stette di mano si scambiano 6 persone che partecipano a una riunione di lavoro?
- a) I terni non sono altro che configurazioni che si possono formare considerando 3 oggetti distinti tra i 90 dati quindi consideriamo le combinazioni semplici.

Ricordiamo, infatti, che le combinazioni semplici di n oggetti di classe k sono le configurazioni che si possono formare considerando k oggetti distinti

Tra gli n dati, considerando distinte due configurazioni se differiscono per almeno un oggetto e non per l'ordine -

Il numero $C_{n,k}$ delle combinazioni semplici di n oggetti di classe k è:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dove $\binom{n}{k}$ indica il coefficiente binomiale -

Nel nostro caso

$$\begin{aligned} C_{90,3} &= \binom{90}{3} = \frac{D_{90,3}}{3!} = \frac{90!}{3!(90-3)!} = \\ &= \frac{90 \times 89 \times \cancel{87!}}{3! \cancel{87!}} = \frac{\overset{30}{\cancel{90}} \times 89}{\cancel{3} \times 2 \times 2} = \frac{2670}{2} = 1335 \end{aligned}$$

b) Per scegliere 4 operai su 25 ci sono $C_{25,4}$ modi

$$\begin{aligned} C_{25,4} &= \binom{25}{4} = \frac{D_{25,4}}{4!} = \frac{25!}{4!(25-4)!} = \\ &= \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22 \times \cancel{21!}}{4! \cancel{21!}} = \frac{25 \times \overset{6}{\cancel{24}} \times 23 \times \cancel{22}''}{\cancel{4} \times 3 \times \cancel{2} \times 1} = \frac{37950}{3} = \\ &= 12650 \end{aligned}$$

Per scegliere 2 impiegati tra 10 ci sono $C_{10,2}$ modi

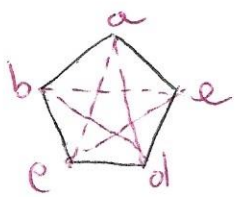
$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{D_{10,2}}{2!} = \frac{10!}{2! (10-2)!} = \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{2! \cancel{8!}} =$$

$$= \frac{\overset{5}{10} \times 9}{2 \times 1} = 5 \times 9 = 45$$

Dunque in totale ci sono $C_{25,4} \times C_{10,2}$ modi per scegliere un comitato

$$C_{25,4} \times C_{10,2} = 1650 \times 45 = 569250$$

e) Un poligono di 5 lati ha anche 5 vertici, per individuare le diagonali dobbiamo collegare i vertici a due a due senza ripetizioni



$A = \{a, b, c, d, e\}$ = vertici

Dobbiamo poi sottrarre il numero dei lati (collegamento tra vertici consecutivi)

Dunque avremo che il numero delle diagonali sarà dato da $C_{5,2} - 5$

$$C_{5,2} - 5 = \binom{5}{2} - 5 = \frac{5!}{2! (5-2)!} - 5 = \frac{5!}{2! 3!} - 5 =$$

$$= \frac{5 \times \overset{2}{4} \times \cancel{3!}}{\cancel{2} \times 1 \times \cancel{3!}} - 5 = \frac{5 \times 2}{1} - 5 = 10 - 5 = 5$$

d) Notiamo che l'ordine non conta poiché se x stringe la mano a y, y non stringerà

la mano a x di nolo -

Dunque abbiamo le combinazioni di 6 (numero delle persone) elementi considerati a 2 a 2

(numero delle persone coinvolte in ogni stretta di mano)

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4!}}{2! \times \cancel{4!}} = \frac{\cancel{3} \times 6 \times 5}{\cancel{2} \times 1} = 15$$

ESERCIZIO 4

- Si lancia una moneta 5 volte, quante sono le possibili successioni che si possono avere?
- In quanti modi si possono presentare le facce di due dadi e quante sono le coppie formate da due numeri dispari?
- Quante parole di 4 lettere, ripetute o no (anche senza significato) si possono formare con le 21 lettere dell'alfabeto italiano?
- Determinare il numero di possibili applicazioni da un insieme A composto da 4 elementi, in un insieme B costituito da 5 elementi.
- Si tratta di una disposizione con ripetizione
Ricordiamo che le disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe k sono le configurazioni

che si possono formare considerando k oggetti diversi
Tra gli n dati

$$\text{Il numero } D'_{n,k} = n^k$$

$$\text{Nel nostro caso } D'_{2,5} = 2^5 = 32$$

b) Le facce del dado sono $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
dunque si tratta di una disposizione ^{con ripetizione} di 6 elementi di
classe 2, cioè $D'_{6,2} = 36$

$$D'_{6,2} = 6^2 = 36$$

Tra queste 36 coppie quelle formate da numeri dispari
sono $B = \{1, 3, 5\}$ cioè una disposizione ^{con ripetizione} di 3 elementi
di classe 2:

$$D'_{3,2} = 3^2 = 9$$

c) si tratta di una disposizione con ripetizione di 21
elementi di classe 4 prendo considerando lettere
anche ripetute, la disposizione sarà semplice
prendo considerando tutte le lettere distinte.

$$\text{Con ripetizione } D'_{21,4} = 21^4 = 194481$$

$$\text{Senza ripetizione } D_{21,4} = 21 \cdot (21-1) \cdot (21-2) \cdot (21-4+1) = \\ = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 143640$$

d) Si tratta di una disposizione con ripetizione di 5 elementi di classe 4, quindi

$$D_{5,4}^r = 5^4 = 625$$

ESERCIZIO 5

- a) Quanti sono gli anagrammi della parola "aritmetica"? E della parola "Topologia"?
- b) In quanti modi si possono mettere in fila 6 bambine e 4 bambini distinguendo la posizione di maschi e femmine?
- c) Quanti numeri naturali diversi si possono fare con le cifre del numero 775551?
- d) se si hanno 3 palline bianche, 6 rosse e 5 verdi, quante sequenze si possono costruire con le 14 palline?
- a) Dato un insieme con n elementi di cui n_1 eguali tra loro, n_2 uguali tra loro e diversi dai precedenti, ..., n_k uguali tra loro e diversi dai precedenti, le permutazioni con ripetizione di questi n oggetti sono gli allineamenti che si possono formare considerando ogni volta Tutti gli oggetti dati.

$$P_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k}^! = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Nel nostro caso essendo la parola ARITMETICA

composta da 10 lettere di cui

2A, 1R, 2I, 2T, 1M, 1E, 1C

il numero degli anagrammi possibili corrisponde alle permutazioni con ripetizione

$$P_{2, 2, 2, 2, 1, 1, 1}^! = \frac{10!}{2! 2! 2! 2! 1! 1! 1!} =$$

$$= \frac{10!}{2! 2! 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6}^3 \times 5 \times \cancel{4}^2 \times 3 \times \cancel{2} \times 1}{\cancel{2} \times 1 \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{2} \times 1} =$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 1}{1} = 453600$$

Nella parola TOPOLOGIA

abbiamo 9 lettere di cui 1T, 3O, 1P, 1L,

1G, 1I, 1A

il numero degli anagrammi è

$$P_{1, 3, 1, 1, 1, 1, 1}^! = \frac{9!}{1! 3! 1! 1! 1! 1! 1!} =$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3}!}{\cancel{3}!} = 60480$$

b) Poiché distinguiamo i bambini tra maschi e femmine si tratta di permutazioni con ripetizioni di 10 elementi (6 bambine e 4 bambini) di cui 6 e 4 ripetuti

$$P_{6,4}^1 = \frac{10!}{6! 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!} 4!} =$$

$$= \frac{\cancel{10}^5 \times \cancel{9}^3 \times \cancel{8}^2 \times 7}{4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = \frac{7 \times 5 \times 3 \times 2}{1} = 210$$

c) Si tratta di una permutazione con ripetizione di 6 elementi: 775551 dove il 7 compare 2 volte, il 5 compare 3 volte e l'1 compare una volta

$$P_{2,3,1}^1 = \frac{6!}{2! 3! 1!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{2! \cancel{3!}} = \frac{6 \times 5 \times 4^2}{2 \times 1} = 60$$

d) Si tratta di una permutazione con ripetizione di 14 oggetti di cui ^{alcuni uguali:} 3 palline bianche, 6 rosse e 5 verdi

$$P_{3,6,5}^1 = \frac{14!}{3! 6! 5!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{3! \cancel{6!} 5!} =$$

$$= \frac{14 \times 13 \times 12 \times \cancel{10}^2 \times \cancel{9}^3 \times \cancel{8}^4 \times 7}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 14 \times 13 \times 12 \times 7 = 15288$$

ESERCIZIO 6

a) In quanti modi possiamo distribuire 8 caramelle a 5 bambini, sapendo che possiamo assegnare a qualche bambino più di una caramella?

b) In quanti modi possiamo collocare 6 oggetti uguali in 4 contenitori in modo che nessuno di essi sia vuoto?

a) Ricordiamo che

Le combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k sono le configurazioni che si possono formare considerando k oggetti tra gli n dati, considerando distinte due configurazioni che differiscano per gli oggetti contenuti o per il numero di ripetizioni di ogni oggetto, ma non per l'ordine degli oggetti.

Il numero $C_{n,k}^1$ delle combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k è

$$C_{n,k}^1 = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Nel nostro caso dobbiamo calcolare le combinazioni con ripetizione di 5 elementi di classe 8

Applichiamo la formula

$$e'_{5,8} = e_{5+8-1,8} = \binom{8+5-1}{5} = \binom{8+5-1}{8-1} = \frac{(8+5-1)!}{5!(8-1)!}$$

$$= \frac{12!}{5!7!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{5! \cancel{7!}} =$$

$$= \frac{12 \times 11 \times \cancel{10}^2 \times \cancel{9}^3 \times \cancel{8}^4}{\cancel{8} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 12 \times 11 \times 2 \times 3 = 792$$

b) Poiché gli oggetti sono uguali e non possiamo distinguerli, bisogna calcolare le combinazioni con ripetizione di 4 elementi di classe 6

$$e'_{4,6} = e_{4+6-1,6} = \binom{4+6-1}{6} = \binom{4+6-1}{4-1} =$$

$$= \frac{(4+6-1)!}{6!(4-1)!} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}3!} =$$

$$= \frac{\cancel{9}^3 \times \cancel{8}^4 \times 7}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$