Matematica

8. Strutture, intervalli e limiti

Giuseppe Vittucci Marzetti[1]

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2020-21

[1] Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

Strutture algebriche e campi

- Un insieme non vuoto A è dotato di una **struttura algebrica** se su di esso sono definite una o più leggi di composizione interna.
- Il tipo di struttura algebrica dipende dalle proprietà delle operazioni definite sugli elementi dell'insieme.
- Informalmente, un **campo** (**field**) è una struttura algebrica in cui sono definite le operazioni binarie interne **somma** $(+)$ e **prodotto** $(\cdot)$, che godono delle consuete proprietà (commutativa, distributiva, associativa), inclusa l'esistenza di:
  - **inversa additiva**: $-a$ per ogni elemento a;
  - **inversa moltiplicativa**: b^{-1} per ogni elemento non nullo b.
- Questo permette di considerare anche le **operazioni inverse** di **sottrazione** $(a - b)$ e **divisione** a/b, definite rispettivamente:

$$a - b = a + (-b)$$
$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$$

- $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ con le operazioni di addizione e moltiplicazione sono campi.

Strutture d'ordine

- Un insieme non vuoto A è dotato di una *struttura d'ordine* se su di esso è definita una **relazione d'ordine** $\succsim$.
- Una relazione $\succsim$ su $A \times A$ è d'ordine se è:
  - **riflessiva**:
    $$x \succsim x \qquad \forall x \in A$$
  - **antisimmetrica**:
    $$(x \succsim y) \wedge (y \succsim x) \Rightarrow (x = y) \qquad \forall x, y \in A$$
  - **transitiva**:
    $$(x \succsim y) \wedge (y \succsim z) \Rightarrow (x \succsim z) \qquad \forall x, y, z \in A$$
- Una struttura d'ordine $(A, \succsim)$ è detta **totale** se $\succsim$ è una relazione d'ordine totale su A.
- Gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ con la relazione d'ordine $\geq$ sono strutture d'ordine totali.

Compatibilità tra struttura algebrica e struttura d'ordine

- Compatibilità tra la struttura d'ordine e l'operazione di somma:

$$(x \geq y) \Rightarrow (x + z \geq y + z) \qquad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$$

- Compatibilità tra la struttura d'ordine e l'operazione di moltiplicazione:

$$(x \geq y) \Rightarrow (x \cdot z \geq y \cdot z) \qquad \forall z > 0 \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Strutture metriche

- Uno **spazio metrico** è una struttura costituita da un insieme A di elementi (detti **punti**) e una **funzione distanza**, detta anche **metrica**:

$$d : A \times A \mapsto \mathbb{R}$$

tale che, $\forall\, x, y, z \in A$, si ha:

$$\begin{aligned}(x \neq y) \Rightarrow d(x, y) > 0 \\ (x = y) \Rightarrow d(x, y) = 0 \\ d(x, y) = d(y, x) \\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\end{aligned}$$

- L'ultima proprietà è chiamata **disuguaglianza triangolare**.
- Lo spazio metrico più comune è lo **spazio euclideo**.

Sistema ampliato di numeri reali

- Il **sistema ampliato di numeri reali** è dato dall'unione dei numeri reali finiti con più e meno infinito:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

- Operazioni algebriche e relazioni d'ordine sul sistema ampliato:

$$\begin{aligned}
-\infty < x < +\infty & & \forall x \in \mathbb{R} \quad (1) \\
+\infty + x = +\infty & \qquad -\infty + x = -\infty & \forall x \in \mathbb{R} \quad (2) \\
+\infty + \infty = +\infty & \qquad -\infty - \infty = -\infty & \\
x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty & & \forall x > 0 \quad (3) \\
x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty & & \forall x < 0 \\
(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty & \qquad (\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty &
\end{aligned}$$

- Le seguenti operazioni di somma, prodotto e quoziente non sono definite:

$$+\infty - \infty = ? \qquad 0 \cdot (\pm\infty) = ? \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$$

Intervallo

- Un **intervallo** è un sottoinsieme A dei numeri reali (o di un altro insieme ordinato) rispetto al quale:

$$(x, y \in A) \wedge (x < z < y) \Rightarrow (z \in A)$$

- Dati $a, b \in \mathbb{R} : a < b$, gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono i seguenti insiemi: intervallo
  - aperto (e limitato): $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - chiuso (e limitato): $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
  - chiuso a sinistra (e limitato): $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
  - chiuso a destra (e limitato): $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
  - aperto a sinistra illimitato superiormente: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
  - chiuso a sinistra illimitato superiormente: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
  - aperto a destra illimitato inferiormente: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
  - chiuso a destra illimitato inferiormente: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
  - intervallo illimitato superiormente e inferiormente: $(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\}$
- Nota: una notazione alternativa usa $], [$ in sostituzione di $(,)$.

Massimo e minimo di un insieme di numeri reali

- Sia A un insieme di numeri reali $A \subseteq \mathbb{R}$
  - un numero reale M si dice **massimo** di A ($M = \max A$) se:

$$M \in A \qquad M \geq a \qquad \forall a \in A$$

  - un numero reale m si dice **minimo** di A ($m = \min A$) se:

$$m \in A \qquad m \leq a \qquad \forall a \in A$$

- Esempio:
  - dato l'insieme $S = \{0, -1, 25\}$, si ha:

$$\max S = 25 \qquad \min S = -1$$

  - dato l'intervallo unitario $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, si ha:

$$\max [0, 1] = 1 \qquad \min [0, 1] = 0$$

  - l'intervallo aperto e limitato $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ non ha né un massimo né un minimo...

Estremo superiore e inferiore

Sia A un insieme di numeri reali $A \subseteq \mathbb{R}$

- **limitato superiormente**, tale cioè che $\exists\, k \in \mathbb{R} : \forall x \in A, k > x$, si dice **estremo superiore** di A l'elemento $S \in \mathbb{R}$ $(s = \sup A)$ tale che:

$$\begin{array}{ll} \forall a \in A & S \geq a \\ \forall \epsilon > 0 & (S - \epsilon, S] \cap A \neq \emptyset \end{array}$$

- **limitato inferiormente**, tale cioè che $\exists\, k \in \mathbb{R} : \forall x \in A, k < x$, si dice **estremo inferiore** di A l'elemento $s \in \mathbb{R}$ $(s = \inf A)$ tale che:

$$\begin{array}{ll} \forall a \in A & s \leq a \\ \forall \epsilon > 0 & [s, s + \epsilon) \cap A \neq \emptyset \end{array}$$

Esempio

- Sia dato l'insieme:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$$

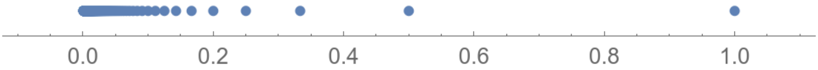
- L'estremo superiore coincide con il massimo: $\sup A = \max A = 1$
- L'insieme al contrario non ha un minimo, poiché:

$$\forall \frac{1}{n} \in A \quad \exists \frac{1}{n'} \in A : \frac{1}{n'} < \frac{1}{n}$$

- L'estremo inferiore è 0, poiché:

$$\forall \frac{1}{n} \in A \qquad 0 < \frac{1}{n}$$

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists \frac{1}{n} \in A : 0 \leq \frac{1}{n} < \epsilon$$



Estremi superiore e inferiore di insiemi illimitati

- Poniamo per definizione nel caso di insiemi A illimitati:
  - superiormente: $\sup A = +\infty$;
  - inferiormente: $\inf A = -\infty$.
- Ogni insieme di numeri reali ammette sempre estremo inferiore e superiore in $\mathbb{R}^*$.

Intorno

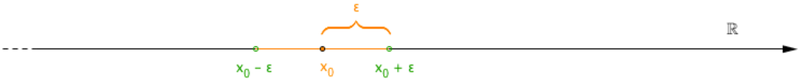
- Dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, la loro **distanza** è data da:

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$$

- **Intorno** di **raggio** ϵ di $x_0 \in \mathbb{R}$ ($\epsilon > 0$) è l'insieme dei numeri reali x che distano da x_0 meno di ϵ:

$$\begin{aligned} N_\epsilon(x_0) &= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \epsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon\} \\ &= (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \end{aligned}$$

  - **intorno destro**: $N_\epsilon^+(x_0) = (x_0, x_0 + \epsilon)$
  - **intorno sinistro**: $N_\epsilon^-(x_0) = (x_0 - \epsilon, x_0)$
- **Intorno sinistro di infinito**, $N(+\infty)$: intervallo del tipo $(M, +\infty)$.
- **Intorno destro di infinito**, $N(-\infty)$: intervallo del tipo $(-\infty, M)$.



Punti interni, esterni e di frontiera

- Un **punto interno** all'insieme A è un punto $a \in A$ tale che esiste un suo intorno completo contenuto in A, cioè:

$$\exists\, \epsilon > 0 : N_\epsilon(a) \subseteq A$$

- Un **punto esterno** all'insieme A è un punto $a \notin A$ tale che esiste un suo intorno completo disgiunto da A, cioè:

$$\exists\, \epsilon > 0 : N_\epsilon(a) \cap A = \emptyset$$

- Un **punto di frontiera** per l'insieme A è un punto che non è né interno né esterno all'insieme A, per cui ogni suo intorno contiene almeno un punto di A e un punto di A^c:

$$N_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset \qquad \wedge \qquad N_\epsilon(a) \cap A^c \neq \emptyset \qquad \forall\, \epsilon > 0$$

Punti di accumulazione e punti isolati

- Un **punto di accumulazione** per l'insieme A è un punto a tale che ogni suo intorno contiene almeno un elemento di A diverso da a:

$$N_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset \qquad \wedge \qquad N_\epsilon(a) \cap A \neq \{a\} \qquad \forall\, \epsilon > 0$$

  - Se un punto è interno allora è di accumulazione.
  - Se un punto è di accumulazione allora non è esterno, è cioè interno o di frontiera.
- Un **punto isolato** dell'insieme A è un punto $a \in A$ che non è di accumulazione, cioè:

$$\exists\, \epsilon > 0 : N_\epsilon(a) \cap A = \{a\}$$

  - Se un punto è isolato allora è di frontiera.
  - Se un punto di frontiera non è di accumulazione, allora è isolato.
- L'**insieme derivato** di A è l'insieme dei punti di accumulazione di A:

$$A' = \{x \in \mathbb{R} : \forall\, \epsilon > 0, \exists\, a \in A : a \in N_\epsilon(x), a \neq x\}$$

ovvero l'insieme dei punti interni di A e quelli di frontiera che non sono punti isolati.

Insiemi aperti e chiusi

- Un insieme $A \in \mathbb{R}$ si dice:
    - **aperto**, quando ogni suo punto è interno all'insieme, ovvero l'insieme non contiene i suoi punti di frontiera.
    - **chiuso**, quando il suo complementare A^c è aperto, o, detto altrimenti, quando A contiene tutti i suoi punti di accumulazione.
- Esistono insiemi che non sono né aperti né chiusi.
- Esistono due (e solo due) insiemi reali che sono sia aperti sia chiusi (**clopen**): $\mathbb{R}$ e $\emptyset$.
- Un **intervallo** è:
    - **aperto** quando non contiene i suoi estremi.
    - **chiuso** quando contiene i suoi estremi.

Definizione generale di limite

- **Definizione informale**: Il limite della funzione f è uguale a $y_0 \in \mathbb{R}^*$ per x che tende a $x_0 \in \mathbb{R}^*$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

quando i valori assunti da f sono *vicini quanto si vuole* a y_0 per valori di x *sufficientemente vicini* a x_0.

- **Definizione formale**: Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A'$ (un punto di accumulazione di A). Diciamo che il limite di f per x che tende a x_0 è uguale a y_0, scrivendo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

quando *per ogni intorno di* y_0 *esiste un intorno di* x_0 tale che, per ogni $x \in A$ appartenente a tale intorno (eventualmente con l'esclusione di x_0), la sua immagine $f(x)$ appartiene all'intorno di y_0.

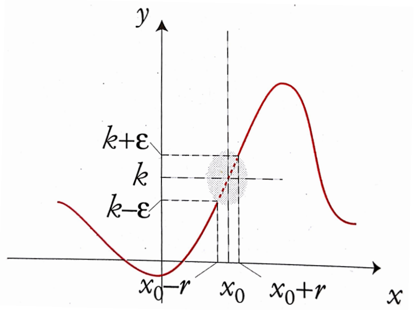
Limite finito per x tendente a un valore finito

- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$ (un punto di accumulazione di A), diciamo che f ammette k come limite al tendere di x a x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k$$

se $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ r > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < r \Rightarrow |f(x) - k| < \epsilon$$



Limite infinito per x tendente a un valore finito e asintoti verticali

- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$ (un punto di accumulazione di A), diciamo che al tendere di x a x_0 f ammette come limite
  - $+\infty$:
  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$
  se $\forall M > 0 \; \exists \, r > 0 : \; 0 < |x - x_0| < r \Rightarrow f(x) > M$
  - $-\infty$:
  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$
  se $\forall M > 0 \; \exists \, r > 0 : \; 0 < |x - x_0| < r \Rightarrow f(x) < -M$
- Quando risulta:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$
il grafico della funzione ha un **asintoto verticale** di equazione
$$x = x_0$$

Limite finito per x tendente all'infinito e asintoti orizzontali

- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con A insieme illimitato superiormente, diciamo che f ammette limite finito k al tendere di x a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$

  quando $\forall \epsilon > 0 \; \exists H > 0 : x > H \Rightarrow |f(x) - k| < \epsilon$
- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con A insieme illimitato inferiormente, diciamo che f ammette limite finito k al tendere di x a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$

  quando $\forall \epsilon > 0 \; \exists H > 0 : x < -H \Rightarrow |f(x) - k| < \epsilon$
- Quando risulta:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = k$$

  il grafico della funzione ha un **asintoto orizzontale** di equazione

$$y = k$$

Limite infinito per x tendente all'infinito

- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con A insieme illimitato superiormente o inferiormente, diciamo che f ammette limite
  - $+\infty$ al tendere di x a $+\infty$
    $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
    quando $\forall M > 0\ \exists\, H > 0 : x > H \Rightarrow f(x) > M.$
  - $+\infty$ al tendere di x a $-\infty$
    $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
    quando $\forall M > 0\ \exists\, H > 0 : x < -H \Rightarrow f(x) > M.$
  - $-\infty$ al tendere di x a $+\infty$
    $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
    quando $\forall M > 0\ \exists\, H > 0 : x > H \Rightarrow f(x) < -M.$
  - $-\infty$ al tendere di x a $-\infty$
    $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
    quando $\forall M > 0\ \exists\, H > 0 : x < -H \Rightarrow f(x) < -M.$

Limite destro e limite sinistro

- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con x_0 punto di accumulazione di A diciamo che, al tendere di x a x_0, f ammette k come
  - **limite destro**
    $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = k$$
    se $\forall \epsilon > 0 \; \exists \, r > 0$ tale che
    $$0 < x - x_0 < r \Rightarrow |f(x) - k| < \epsilon$$
  - **limite sinistro**
    $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = k$$
    se $\forall \epsilon > 0 \; \exists \, r > 0$ tale che
    $$-r < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - k| < \epsilon$$

Limite per difetto e limite per eccesso

- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con x_0 punto di accumulazione di A diciamo che, al tendere di x a x_0, f ammette limite k per:
  - **eccesso**
    $$\lim_{x \to x_0} f(x) = k^+$$
    se $\forall \epsilon > 0 \; \exists \, r > 0$ tale che
    $$0 < |x - x_0| < r \Rightarrow k \leq f(x) < k + \epsilon$$
  - **difetto**
    $$\lim_{x \to x_0} f(x) = k^-$$
    se $\forall \epsilon > 0 \; \exists \, r > 0$ tale che
    $$0 < |x - x_0| < r \Rightarrow k - \epsilon < f(x) \leq k$$

Limiti di successioni

- **Successione convergente**: la successione s_n converge per $n \to +\infty$ al valore finito k quando

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \, H > 0 : n > H \Rightarrow |s_n - k| < \epsilon$$

- **Successione divergente**: la successione s_n diverge per $n \to +\infty$ a
  - $+\infty$ quando

$$\forall M > 0 \ \exists \, H > 0 : n > H \Rightarrow s_n > M$$

  - $-\infty$ quando

$$\forall M > 0 \ \exists \, H > 0 : n > H \Rightarrow s_n < -M$$

Teorema di esistenza del limite per le funzioni crescenti o decrescenti

- Se la funzione f è crescente per $x \in (x_0, x_0 + r)$ con $r > 0$, allora il suo limite per $x \to x_0^+$ esiste ed è uguale all'estremo inferiore dei valori di f nell'insieme considerato:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x \in (x_0, x_0 + r)} f(x)$$

- Se la funzione f è decrescente per $x \in (x_0, x_0 + r)$ con $r > 0$, allora il suo limite per $x \to x_0^+$ esiste ed è uguale all'estremo superiore dei valori di f nell'insieme considerato:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup_{x \in (x_0, x_0 + r)} f(x)$$

Teorema del confronto

- **Teorema del confronto** (detto anche **teorema dei carabinieri**):
  - Date tre funzioni f, g, h con x_0 punto di accumulazione per i loro insiemi di definizione, se
    - $\exists r > 0$ tale che $g(x) \leq f(x) \leq h(x)\ \forall x : 0 < |x - x_0| < r$, e
    - $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = k$

    allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = k$.
- Corollari:
  - se $f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
  - se $f(x) \leq g(x)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.
  - se $\exists r > 0$ tale che $|f(x)| \leq g(x)\ \forall x : 0 < |x - x_0| < r$, e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Teorema di unicità del limite

- **Teorema di unicità del limite**: Se la funzione f ammette limite per x che tende ad x_0, questo limite è unico.
- Dimostrazione:
    - Supponiamo che f ammetta due limiti (finiti) diversi k_1 e k_2 $(> k_1)$.
    - Allora $\forall\, \epsilon > 0$ deve esistere un intorno:
        - $N_1(\epsilon)$ di x_0 per cui $k_1 - \epsilon < f(x) < k_1 + \epsilon$, $\forall\, x \in N_1(\epsilon)$.
        - $N_2(\epsilon)$ di x_0 per cui $k_2 - \epsilon < f(x) < k_2 + \epsilon$, $\forall\, x \in N_2(\epsilon)$.
    - $\forall\, x \in N_1(\epsilon) \cap N_2(\epsilon)$ deve allora aversi:

      $$k_2 - \epsilon < f(x) < k_1 + \epsilon$$

      da cui:

      $$\epsilon > \frac{k_2 - k_1}{2}$$

      ma questo contraddice l'assunto, poiché ϵ dovrebbe poter essere arbitrariamente piccolo.