Matematica
Esempio esame Unità 8-9

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

Dicembre 2018

1. *Esercizio.* Dato l'insieme $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ con $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4$ e una relazione R definita su $A \times A$ discuti se e perché nei seguenti casi la relazione viola i requisiti affinché (A, R) sia una *struttura d'ordine* e, in caso non accada, mostra l'ordinamento indotto da R sugli elementi di A assumendo che R sia una *relazione d'ordine*.

   (a) (2 punti)

   $$a_1 \, R \, a_2 \qquad a_2 \, R \, a_4 \qquad a_1 \, R \, a_4 \qquad a_2 \, R \, a_3 \qquad a_2 \, R \, a_1$$

   (b) (2 punti)

   $$a_1 \, R \, a_2 \qquad a_2 \, R \, a_4 \qquad a_1 \, R \, a_4 \qquad a_2 \, R \, a_3 \qquad a_4 \, R \, a_3$$

   (c) (2 punti)

   $$a_1 \, R \, a_2 \qquad a_2 \, R \, a_4 \qquad a_4 \, R \, a_1 \qquad a_2 \, R \, a_3 \qquad a_4 \, R \, a_3$$

2. *Esercizio.* Per ognuno dei seguenti esempi spiega se e perché le corrispondenti strutture possono considerarsi *strutture metriche*.

   (a) (2 punti) L'insieme dei numeri naturali con la funzione che associa ad ogni coppia di questi numeri il valore assoluto della loro differenza:

   $$f(n_1, n_2) = |n_1 - n_2| \qquad \forall n_1, n_2 \in \mathcal{N}$$

   (b) (2 punti) L'insieme dei locali in una determinata città con la funzione che associa ad ogni coppia di locali la distanza in linea d'aria tra i due locali.

   (c) (2 punti) L'insieme dei locali in una determinata città in cui sono presenti diversi sensi unici, con la funzione che associa ad ogni coppia di locali la distanza minima che è necessario percorrere in auto per raggiungere il secondo locale partendo dal primo locale.

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

(d) (2 punti) L'insieme delle città italiane con la funzione che associa ad ogni coppia di città il costo minimo da sostenere per spostarsi in treno dalla prima alla seconda città.

3. *Esercizio.* Determina *minimi*, *massimi*, *estremi superiori*, *estremi inferiori*, *punti interni*, *punti di accumulazione*, *punti di frontiera* e *punti isolati* dei seguenti insiemi.
   (a) (3 punti) $I = \{x \in \mathcal{R} : -2 < x < 3\}$
   (b) (3 punti) $I = \{x \in \mathcal{R} : 3 \leq x \leq 10\}$
   (c) (3 punti) $I = \{x \in \mathcal{R} : x \geq 1\}$
   (d) (3 punti) $A = \{x \in \mathcal{R} : \frac{1}{x} \leq 1\}$
   (e) (3 punti) $A = \{x \in \mathcal{R} : 0 < |x-1| < \frac{1}{3}\}$
   (f) (3 punti)] $A = \{x \in \mathcal{R} : x = 2^n, n \in \mathcal{N}\}$

4. *Esercizio.* Utilizzando la *definizione di limite*, verifica l'esattezza dei seguenti limiti:
   (a) (2 punti) $\lim_{x\to 2} 5x + 2 = 12$.
   (b) (2 punti) $\lim_{x\to 2}(x^2 + 2) = 6$.
   (c) (2 punti) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
   (d) (2 punti) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
   (e) (3 punti) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+3} = 1$.
   (f) (2 punti) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

5. *Esercizio.* Disegna le seguenti funzioni, determina se sono continue nell'intervallo dato e, nel caso non lo siano, determina la natura dei punti di discontinuità.
   (a) (2 punti) $x \in (-\infty, +\infty)$
   $$f(x) = \ln|x+2|$$
   (b) (2 punti) $x \in (0, +\infty)$
   $$f(x) = |\ln x|$$
   (c) (3 punti) $x \in (-\infty, +\infty)$
   $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
   (d) (2 punti) $x \in (-\infty, +\infty)$
   $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x = 0 \\ x^2+1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

6. *Esercizio.* Calcolare i seguenti limiti.
   (a) (2 punti) $\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x})$
   (b) (2 punti) $\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x})$
   (c) (2 punti) $\lim_{x\to+\infty}(2+\sqrt{x})(\mathrm{e}^{-x} - 2)$
   (d) (2 punti) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+x-1}}{x-\ln x}$
   (e) (2 punti) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+3} - x)$

7. (3 punti) *Esercizio.* Calcola il limite destro e il limite sinistro della seguente funzione per $x \to 1$:

$$f(x) = \frac{1 + \mathrm{e}^{x-1}}{x - 1}$$

Cosa puoi desumere dal risultato riguardo la continuità di $f(x)$ nel punto $x = 1$?

8. (3 punti) *Esercizio.* Stabilisci se la relazione $f = o(g)$ (f è "o piccolo" di g) è vera per:
   (a) (2 punti) $x \to +\infty$ essendo:

   $$f(x) = x + 1 \qquad\qquad g(x) = x\sqrt{x}$$

   (b) (2 punti) $x \to 0$ essendo:

   $$f(x) = x^4 + x^3 \qquad\qquad g(x) = 2x^2$$

   (c) (2 punti) $x \to +\infty$ essendo:

   $$f(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad\qquad g(x) = 1$$

9. *Problema.* Zeus ed Era sono eterni. Zeus ha attualmente il quadruplo degli anni di Era.
   (a) (2 punti) A quale valore tende il rapporto tra l'età di Zeus e quella di Era con il passare degli anni?
   (b) (2 punti) Supponendo che l'età media degli dei aumenti ogni anno di circa 6 mesi (per via del fatto che qualche nuovo dio nasce ogni anno e quasi nessuno di quelli in vita muore), a quale valore tende il rapporto tra l'età di Zeus e quella media degli dei con il trascorrere degli anni?