Matematica
Esempio esame – Unità 8-9

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

Dicembre 2018

1. *Esercizio.* Dato l'insieme $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ con $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4$ e una relazione R definita su $A \times A$ discuti se e perché nei seguenti casi la relazione viola i requisiti affinché (A, R) sia una *struttura d'ordine* e, in caso non accada, mostra l'ordinamento indotto da R sugli elementi di A assumendo che R sia una *relazione d'ordine*.

   (a) (2 punti)

   $$a_1 \, R \, a_2 \qquad a_2 \, R \, a_4 \qquad a_1 \, R \, a_4 \qquad a_2 \, R \, a_3 \qquad a_2 \, R \, a_1$$

   Soluzione (A, R) non è una struttura d'ordine in quanto R non è *antisimmetrica*, essendo $a_1 \neq a_2$ e nonostante questo $a_1 \, R \, a_2$ e $a_2 \, R \, a_1$.

   (b) (2 punti)

   $$a_1 \, R \, a_2 \qquad a_2 \, R \, a_4 \qquad a_1 \, R \, a_4 \qquad a_2 \, R \, a_3 \qquad a_4 \, R \, a_3$$

   Soluzione In tal caso R non viola nessuna delle proprietà. Assumendo che R sia *riflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva*, l'ordinamento indotto da R sugli elementi di A è il seguente:

   $$a_1 \; R \; a_2 \; R \; a_4 \; R \; a_3$$

   (c) (2 punti)

   $$a_1 \, R \, a_2 \qquad a_2 \, R \, a_4 \qquad a_4 \, R \, a_1 \qquad a_2 \, R \, a_3 \qquad a_4 \, R \, a_3$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Soluzione R non soddisfa la proprietà *transitiva*, poiché $a_1 \, R \, a_2$ e $a_2 \, R \, a_4$, e ciononostante $a_4 \, R \, a_1$.

2. *Esercizio.* Per ognuno dei seguenti esempi spiega se e perché le corrispondenti strutture possono considerarsi *strutture metriche*.

(a) (2 punti) L'insieme dei numeri naturali con la funzione che associa ad ogni coppia di questi numeri il valore assoluto della loro differenza:

$$f(n_1, n_2) = |n_1 - n_2| \qquad\qquad \forall n_1, n_2 \in \mathcal{N}$$

Soluzione La struttura è una struttura metrica, in quanto f soddisfa tutte le proprietà di una *funzione distanza*:

- restituisce sempre un numero reale positivo per ogni coppia di punti:

$$|n_1 - n_2| > 0 \qquad\qquad \forall n_1, n_2 \in \mathcal{N} : n_1 \neq n_2$$

- restituisce valore nullo se i punti coincidono: $|n_1 - n_1| = 0$;
- è *simmetrica*:

$$|n_1 - n_2| = |n_2 - n_1| \qquad\qquad \forall n_1, n_2 \in \mathcal{N}$$

- soddisfa la *disuguaglianza triangolare*. Ricordando infatti che per il valore assoluto vale la disuguaglianza triangolare, $|x + y| \leq |x| + |y|$, nel caso di specie si ha:

$$|n_1 - n_2| = |(n_1 - n_3) + (n_3 - n_2)| \leq |n_1 - n_3| + |n_3 - n_2| \qquad \forall n_1, n_2, n_3 \in \mathcal{N}$$

(b) (2 punti) L'insieme dei locali in una determinata città con la funzione che associa ad ogni coppia di locali la distanza in linea d'aria tra i due locali.

Soluzione Si tratta di una struttura metrica, in quanto la funzione soddisfa tutti i requisiti di una funzione distanza: i) è sempre positiva ed è nulla nel caso di distanza di un locale da sé stesso; ii) è simmetrica (le distanze da a a b e da b ad a sono uguali); iii) soddisfa la disuguaglianza triangolare: essendo la distanza in linea d'aria tra due locali a e b sempre minore o uguale della somma delle distanze tra a e un terzo locale c e tra questo e b (per qualsiasi triangolo la somma dei cateti è maggiore dell'ipotenusa).

(c) (2 punti) L'insieme dei locali in una determinata città in cui sono presenti diversi sensi unici, con la funzione che associa ad ogni coppia di locali la distanza minima che è necessario percorrere in auto per raggiungere il secondo locale partendo dal primo locale.

Soluzione La struttura non è una struttura metrica, in quanto la funzione non soddisfa il requisito di simmetria: essendo presenti sensi unici non necessariamente la distanza da percorrere in auto per raggiungere il locale b partendo dal locale a è la stessa che occorre percorrere per raggiungere a da b.

(d) (2 punti) L'insieme delle città italiane con la funzione che associa ad ogni coppia di città il costo minimo da sostenere per spostarsi in treno dalla prima alla seconda città.

Soluzione La struttura non è una struttura metrica se, come in genere accade, il costo minimo per andare da a a b non è lo stesso che occorre per viaggiare da b ad a (viene meno la simmetria) e il costo necessario per spostarsi direttamente da a a b è maggiore di quello che occorre sostenere per spostarsi da a a c (cambiando magari treno) e poi da c a b. In tal caso viene meno la disuguaglianza triangolare.

3. *Esercizio.* Determina *minimi*, *massimi*, *estremi superiori*, *estremi inferiori*, *punti interni*, *punti di accumulazione*, *punti di frontiera* e *punti isolati* dei seguenti insiemi.

   (a) (3 punti) $I = \{x \in \mathcal{R} : -2 < x < 3\}$

   Soluzione L'intervallo è aperto e non ha un minimo e un massimo.

   $$\inf I = -2 \qquad\qquad \sup I = 3$$

   L'insieme è aperto e tutti i punti che appartengono all'insieme sono interni: $(-2, 3)$.
   I punti di accumulazione sono tutti i punti $x \in [-2, 3]$ (questo è l'insieme derivato).
   I punti di frontiera sono gli estremi dell'intervallo: $\{-2, 3\}$.
   Essendo un intervallo, non ci sono punti isolati.

   (b) (3 punti) $I = \{x \in \mathcal{R} : 3 \leq x \leq 10\}$

   Soluzione L'intervallo è chiuso e si ha:

   $$\min I = \inf I = 3 \qquad\qquad \max I = \sup I = 10$$

   I punti interni sono i punti $x \in (3, 10)$.
   Essendo chiuso, l'insieme contiene tutti i suoi punti di accumulazione: $x \in [3, 10]$.
   I punti di frontiera sono gli estremi dell'intervallo: $\{3, 10\}$.
   Essendo un intervallo, non ci sono punti isolati.

   (c) (3 punti) $I = \{x \in \mathcal{R} : x \geq 1\}$

   Soluzione Si tratta di un intervallo chiuso in $\mathcal{R}$ e illimitato superiormente, che quindi non ha un massimo e per cui:

   $$\min I = \inf I = 1 \qquad\qquad \sup I = +\infty$$

   I punti interni sono i punti $x \in (1, +\infty)$.
   Essendo chiuso, l'insieme contiene tutti i suoi punti di accumulazione: $x \in [1, +\infty)$.
   L'insieme ha un unico punto di frontiera $x \in \{1\}$.
   Essendo un intervallo, non ci sono punti isolati.

   (d) (3 punti) $A = \{x \in \mathcal{R} : \frac{1}{x} \leq 1\}$

Soluzione I punti che appartengono all'insieme sono $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$.
L'insieme non ha un minimo e un massimo e:

$$\inf A = -\infty \qquad\qquad \sup A = +\infty$$

I punti interni sono i punti $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
I punti di accumulazione sono i punti $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.
I punti di frontiera sono i punti $x \in \{0, 1\}$.
Risultando dall'unione di due intervalli, l'insieme non ha punti isolati.

(e) (3 punti) $A = \{x \in \mathcal{R} : 0 < |x-1| < \frac{1}{3}\}$

Soluzione Si tratta di un intorno bucato di 1 di raggio $\frac{1}{3}$. I punti che appartengono all'insieme sono i punti $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right)$.
L'insieme non ha un minimo e un massimo e:

$$\inf A = \frac{2}{3} \qquad\qquad \sup A = \frac{4}{3}$$

L'insieme è aperto poiché contiene tutti i suoi punti interni: $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right)$.
I punti di accumulazione sono i punti $x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$.
I punti di frontiera sono i punti $x \in \left\{\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right\}$.
Risultando dall'unione di due intervalli, l'insieme non ha punti isolati.

(f) (3 punti)] $A = \{x \in \mathcal{R} : x = 2^n, n \in \mathcal{N}\}$

Soluzione L'insieme è illimitato superiormente e non ha quindi un massimo:

$$\min A = \inf A = 1 \qquad\qquad \sup A = +\infty$$

L'insieme è chiuso (il suo complementare è aperto) e non ha punti interni.
Non ci sono punti di accumulazione e tutti i punti $x \in A$ sono punti di frontiera isolati.

4. *Esercizio.* Utilizzando la *definizione di limite*, verifica l'esattezza dei seguenti limiti:

(a) (2 punti) $\lim_{x\to 2} 5x + 2 = 12$.

Soluzione Occorre mostrare che, in corrispondenza di ogni $\epsilon > 0$, esiste un $r > 0$ tale che $|f(x) - 12| < \epsilon$ per ogni $|x - 2| < r$:

$$-\epsilon < (5x + 2) - 12 < \epsilon$$

$$2 - \frac{\epsilon}{5} < x < 2 + \frac{\epsilon}{5}$$

Quest'ultima individua un intorno di 2 di raggio $r = \epsilon/5$ e il limite è pertanto verificato.

(b) (2 punti) $\lim_{x\to 2}(x^2 + 2) = 6$.

Soluzione Per $\epsilon > 0$ poniamo:

$$-\epsilon < (x^2 + 2) - 6 < \epsilon$$

$$4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon$$

Assumendo $x > 0$ (se il limite è per $x \to 2$, l'intorno deve essere centrato in 2 e può essere sufficientemente piccolo da considerare solo valori positivi), si ha:

$$\sqrt{4 - \epsilon} < x < \sqrt{4 + \epsilon}$$

Essendo $\sqrt{4 - \epsilon} < 2 < \sqrt{4 + \epsilon}$, l'intervallo precedente è soprainsieme di un intorno di 2 e il limite è pertanto verificato.[1]

(c) (2 punti) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Soluzione Occorre mostrare che, in corrispondenza di ogni $m > 0$, esiste un $r > 0$ tale che $f(x) > m$ per ogni $0 < x < 0 + r$ (intorno destro di 0).
La diseguaglianza è soddisfatta fissato $r = 1/m$, essendo $1/x > m$ per ogni $0 < x < 1/m$, e il limite è verificato.

(d) (2 punti) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Soluzione Occorre mostrare che, in corrispondenza di ogni $m > 0$, esiste un $r > 0$ tale che $f(x) < -m$ per ogni $0 - r < x < 0$ (intorno sinistro di 0).
La diseguaglianza è soddisfatta fissato $r = 1/m$, essendo $1/x < m$ per ogni $-1/m < x < 0$, e il limite è verificato.

(e) (3 punti) $\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x+3} = 1$.

Soluzione Occorre mostrare che, in corrispondenza di ogni $\epsilon > 0$, esiste un $r > 0$ tale che $|f(x) - 1| < \epsilon$ per ogni $x > r$ $(x \to +\infty)$ e $x < -r$ $(x \to -\infty)$

$$\left| \frac{x-1}{x+3} - 1 \right| < \epsilon$$

$$\frac{4}{|x+3|} < \epsilon$$

$$|x+3| > \frac{4}{\epsilon}$$

da cui:

$$x < -\left(\frac{4}{\epsilon} + 3\right) \qquad \vee \qquad x > \frac{4}{\epsilon} - 3$$

Poiché se $x > \frac{4}{\epsilon} + 3$ allora $x > \frac{4}{\epsilon} - 3$, fissato $r = \frac{4}{\epsilon} + 3$ la diseguaglianza $|f(x) - 1| < \epsilon$ è soddisfatta per ogni $x \in (-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$ e il limite verificato.

(f) (2 punti) $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

[1] Fissando ad esempio $r = \min\{2 - \sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon} - 2\} = \sqrt{4 + \epsilon} - 2$, si ha che, per ogni $|x - 2| < r$, $|f(x) - 6| < \epsilon$.

Soluzione Occorre mostrare che, in corrispondenza di ogni $m > 0$, esiste un $r > 0$ tale che $f(x) > m$ per ogni $x > r$:

$$\ln x > m$$

$$x > e^m$$

Fissato $r = e^m$ la diseguaglianza è soddisfatta e il limite verificato.

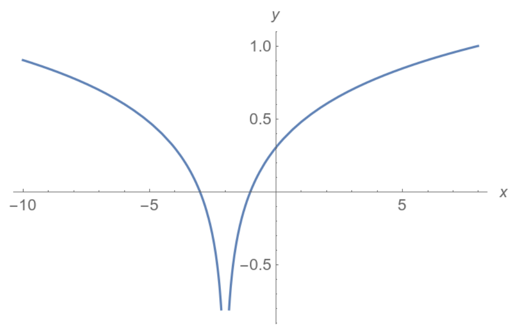
5. *Esercizio.* Disegna le seguenti funzioni, determina se sono continue nell'intervallo dato e, nel caso non lo siano, determina la natura dei punti di discontinuità.

(a) (2 punti) $x \in (-\infty, +\infty)$

$$f(x) = \ln|x+2|$$

Soluzione La funzione presenta un punto di discontinuità di secondo tipo in $x = -2$ essendo:

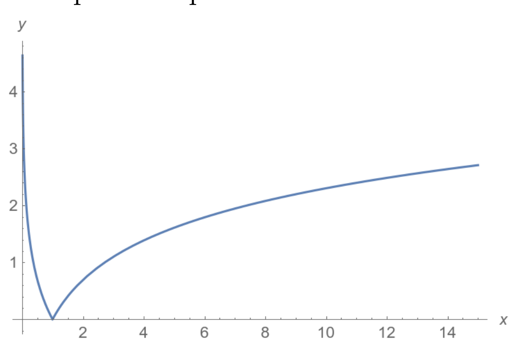
$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty = \lim_{x \to -2^+} f(x)$$



(b) (2 punti) $x \in (0, +\infty)$

$$f(x) = |\ln x|$$

Soluzione La funzione non presenta punti di discontinuità nell'intervallo $(0, +\infty)$.

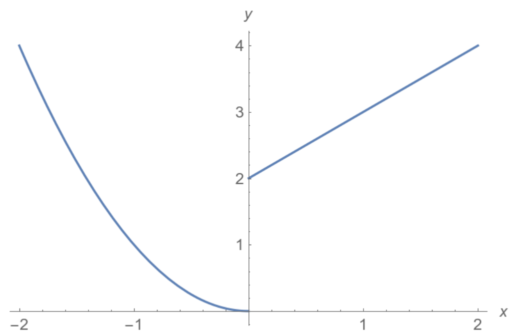


(c) (3 punti) $x \in (-\infty, +\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Soluzione La funzione presenta un punto di discontinuità di prima specie (*discontinuità a salto*) in $x = 0$, essendo:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \neq 2 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

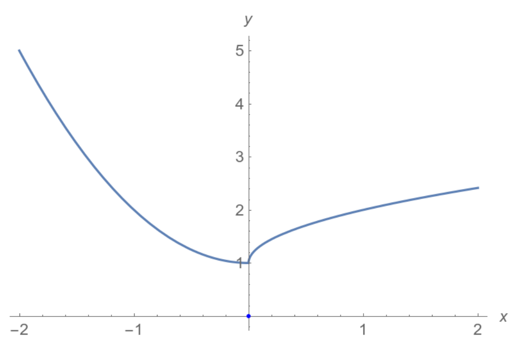


(d) (2 punti) $x \in (-\infty, +\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Soluzione La funzione presenta un punto di discontinuità di terza specie (*discontinuità eliminabile*) in $x = 0$, essendo:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$$



6. *Esercizio.* Calcolare i seguenti limiti.

(a) (2 punti) $\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x})$

Soluzione Essendo la funzione la differenza di funzione continue è continua e pertanto il suo limite per $x \to 0$ è uguale al valore della funzione in 0:

$$\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x}) = \mathrm{e}^{2\cdot 0} - 2\mathrm{e}^{0} = -1$$

(b) (2 punti) $\lim_{x\to +\infty}(\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x})$

Soluzione Essendo differenza di infiniti di ordini differenti si può considerare solo l'infinito di ordine superiore, per cui:

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}) = \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2x} = +\infty$$

(c) (2 punti) $\lim_{x\to+\infty}(2+\sqrt{x})(\mathrm{e}^{-x}-2)$

Soluzione

$$\lim_{x\to+\infty}(2+\sqrt{x})(\mathrm{e}^{-x}-2) = \lim_{x\to+\infty}(2+\sqrt{x})\cdot\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^{-x}-2) = +\infty\cdot(-2) = -\infty$$

dove la prima uguaglianza deriva dal fatto che il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti e l'operazione non dà luogo a una forma indeterminata.

(d) (2 punti) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+x-1}}{x-\ln x}$

Soluzione

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+x-1}}{x-\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{3}\frac{|x|}{x} = \sqrt{3}$$

dove la prima uguaglianza segue dal principio di eliminazione degli infiniti di ordine inferiore.

(e) (2 punti) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+3}-x)$

Soluzione Sostituendo si arriva alla forma di indecisione $+\infty-\infty$ in cui i due infiniti sono dello stesso ordine. È tuttavia possibile riesprimere la funzione come segue:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+3}-x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+4x+3}+x}{\sqrt{x^2+4x+3}+x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+3-x^2}{\sqrt{x^2+4x+3}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x+3}{\sqrt{x^2+4x+3}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x} = 2\end{aligned}$$

7. (3 punti) *Esercizio.* Calcola il limite destro e il limite sinistro della seguente funzione per $x\to 1$:

$$f(x) = \frac{1+\mathrm{e}^{x-1}}{x-1}$$

Cosa puoi desumere dal risultato riguardo la continuità di $f(x)$ nel punto $x=1$?

Soluzione Poiché il denominatore si annulla in $x \to 1$ la funzione non è definita nel punto e il limite non può risolversi per sostituzione diretta. Tuttavia si ha:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1+\mathrm{e}^{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (1+\mathrm{e}^{x-1}) \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = 2\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1+\mathrm{e}^{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (1+\mathrm{e}^{x-1}) \cdot \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = 2\cdot(-\infty) = -\infty$$

Essendo diversi il limite destro e il limite sinistro, nel punto $x = 1$ la funzione presenta un punto di discontinuità di seconda specie.

8. (3 punti) *Esercizio.* Stabilisci se la relazione $f = \mathcal{o}(g)$ (f è "o piccolo" di g) è vera per:

   (a) (2 punti) $x \to +\infty$ essendo:

   $$f(x) = x + 1 \qquad\qquad g(x) = x\sqrt{x}$$

   Soluzione f è trascurabile per $x \to +\infty$ rispetto a g se:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

   La relazione è vera essendo:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

   (b) (2 punti) $x \to 0$ essendo:

   $$f(x) = x^4 + x^3 \qquad\qquad g(x) = 2x^2$$

   Soluzione La relazione è vera essendo:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^4+x^3}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^2} = 0$$

   (c) (2 punti) $x \to +\infty$ essendo:

   $$f(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad\qquad g(x) = 1$$

   Soluzione La relazione è vera poiché f è infinitesima per $x \to +\infty$:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

9. *Problema.* Zeus ed Era sono eterni. Zeus ha attualmente il quadruplo degli anni di Era.

   (a) (2 punti) A quale valore tende il rapporto tra l'età di Zeus e quella di Era con il passare degli anni?

Soluzione Indicando con k l'età attuale di Era, il valore a cui tende il rapporto tra i loro anni con il trascorrere del tempo è dato da:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{4k+t}{k+t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{t} = \lim_{t\to+\infty} 1 = 1$$

dove, essendo k una costante, la prima eguaglianza segue dal principio di eliminazione degli infiniti di ordine inferiore.

(b) (2 punti) Supponendo che l'età media degli dei aumenti ogni anno di circa 6 mesi (per via del fatto che qualche nuovo dio nasce ogni anno e quasi nessuno di quelli in vita muore), a quale valore tende il rapporto tra l'età di Zeus e quella media degli dei con il trascorrere degli anni?

Soluzione Indicando con k l'età di Zeus e con $\bar{k}$ l'età media degli dei nell'anno corrente, il valore a cui tende il rapporto tra l'età di Zeus e quella media degli dei con il trascorrere degli anni è dato dal seguente limite:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{k+t}{\bar{k}+t/2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{t} = \lim_{t\to+\infty} 2 = 2$$