Matematica

10. Derivate

Giuseppe Vittucci Marzetti[1]

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2020-21

[1]Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

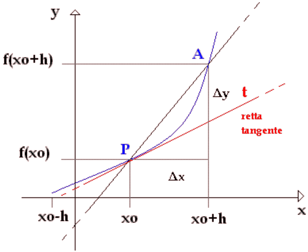
Definizione di derivata

- La derivata formalizza l'idea di reattività o sensibilità della variabile dipendente al cambiamento della variabile indipendente.
- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathrm{int}(A)$ (un punto interno ad A).
- Il rapporto incrementale è:

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}$$

- La derivata della funzione f nel punto x_0, $f'(x)$, è il limite del rapporto incrementale, se esiste finito, per $h \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Derivata di una funzione lineare

- Data una funzione lineare:

$$f(x) = mx + q$$

la derivata è costante e pari al coefficiente angolare:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\bigg|_{x=x_0} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h) + q - (mx+q)}{h}\bigg|_{x=x_0} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = m \end{aligned}$$

Derivata di una funzione quadratica

- Data una funzione quadratica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

la derivata è una funzione lineare:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\Big|_{x=x_0} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h}\Big|_{x=x_0} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{ax^2 + ah^2 + 2axh + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h}\Big|_{x=x_0} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{ah^2 + 2axh + bh}{h}\Big|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0}(ah + 2ax + b)\Big|_{x=x_0} \\
&= 2a\,x + b\Big|_{x=x_0}
\end{aligned}$$

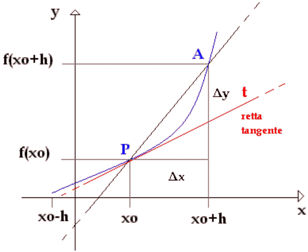
Significato geometrico della derivata

- Se consideriamo il punto iniziale $(x_0, f(x_0))$ e il punto incrementale $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, il coefficiente angolare della corda che li congiunge è espresso da:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{\Delta f}{h}$$

- Essendo $f'(x)$ il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$, la derivata $f(x)$ in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente al punto $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



Notazione di Lagrange, Leibniz e Newton

Data una funzione $y = f(x)$, la **derivata** (**prima**) e la **derivata seconda** (la derivata della derivata) di $f(x)$ si indicano rispettivamente:

- nella **notazione di Lagrange** con:

$$f'(x) \qquad\qquad f''(x)$$

- nella **notazione di Newton**, adottata di solito in fisica nelle equazioni differenziali per indicare la derivata rispetto al tempo, con:

$$\dot{y} \qquad\qquad \ddot{y}$$

- nella **notazione di Leibniz**, la più antica tuttora in uso e in cui si utilizza il simbolo d (letto "de") usato da Leibniz per gli **infinitesimi** (da cui "calcolo infinitesimale"), con:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

Sviluppo del concetto di limite e rifondazione del “calculus”

- Il concetto di limite come lo conosciamo oggi si deve principalmente ai contributi di **Cauchy** e **Weierstrass** nel XIX secolo, che su di esso rifondarono il calcolo infinitesimale.
- Per quanto “involuto” possa sembrare, il concetto di limite moderno è incomparabilmente più semplice e chiaro di tutto quello che lo precedeva...

Calcolo infinitesimale e derivate senza limiti

- Prima di Cauchy e Weierstrass, il "calculus" si basava su:
  - il **metodo delle flussioni** di **Newton**, che definisce la derivata come "rapporto ultimo":

"..il rapporto ultimo di due quantità evanescenti non è nullo, perché prima che esse svaniscano, il loro rapporto non è l'ultimo e allorché sono svanite non ne hanno più alcuno. Ma è facile rispondere: [...] il rapporto ultimo delle quantità evanescenti deve essere inteso come il rapporto fra dette quantità non prima che siano svanite e nemmeno dopo, ma nell'istante stesso in cui svaniscono."

  - gli **infinitesimi** di **Leibniz**, che sugli stessi dice:

"Nelle dimostrazioni, ho introdotto quantità incomparabilmente piccole, vale a dire la differenza di due quantità comuni, incomparabile con queste quantità. [...] se qualcuno non vuole impiegare quantità infinitamente piccole, può assumerle tanto piccole quanto giudica sufficiente perché siano incomparabili e producano un errore di nessuna importanza, anzi, minore dell'errore dato. [Quindi] quando diciamo infinitamente grandi (o più esattamente infiniti) e infinitamente piccoli (o gli infinitesimi delle quantità a noi note), intendiamo indefinitamente grandi e indefinitamente piccoli, vale a dire tanto grandi quanto si vogliano e tanto piccoli quanto si vogliano perché l'errore che si assegna sia minore dell'errore in precedenza assegnato."

La metafisica dell'analisi infinitesimale

- Il concetto di rapporto ultimo di Newton era confuso, mentre quello di infinitesimo di Leibniz sembrava contraddittorio:
  - gli infinitesimi erano numeri minori in valore assoluto di ogni numero reale positivo, ma diversi da zero;
  - gli infinitesimi erano numeri diversi da zero e uguali a zero.
- Su queste basi, il calcolo infinitesimale era criticato aspramente da Berkeley (1734):

> *"Concepire una quantità infinitamente piccola (ossia infinitamente minore di una quantità sensibile o immaginabile, o di qualunque infima quantità finita) è, a mio avviso, al di sopra delle mie capacità. Ma il concepire una parte di tale quantità infinitamente piccola la quale sia ancora infinitamente più piccola della medesima, tale che, per conseguenza, anche moltiplicata infinitamente, non possa uguagliare la più piccola quantità finita, costituisce, come io sospetto, una infinita difficoltà per qualsiasi uomo [...]*
>
> *Niente è più facile che inventare espressioni o notazioni per le flussioni e gli infinitesimi di primo, secondo, terzo ordine ecc. procedendo nella medesima forma senza alcun limite, $'$, $''$, $'''$, oppure dx, ddx, dddx, ecc. [...]*
>
> *E cosa sono questi incrementi evanescenti? Essi non sono quantità finite, non sono infinitesimi, non sono niente. Ed allora non dobbiamo forse chiamarli spettri di quantità morte?"*

L'atto di fede per la metafisica dell'analisi infinitesimale

- Ma il calcolo infinitesimale funzionava in pratica e trovò ampia applicazione nel XVIII secolo in matematica e fisica, nonostante le fondamenta teoriche non solide.
- A questo proposito, agli inizi del XIX secolo il matematico francese Bossut (1802) afferma:

> *"Confidai il mio imbarazzo a un famoso geometra, che mi rispose: "Ammettete gli infinitamente piccoli come un'ipotesi, studiate la pratica del calcolo, e la fede verrà." In effetti la fede è venuta: mi sono convinto che la metafisica dell'analisi infinitesimale è la medesima del metodo di esaustione degli antichi geometri."*

Il ritorno degli infinitesimi

- Robinson (1966) rifonda l'analisi sul concetto di infinitesimo dopo averlo ridefinito in modo logicamente rigoroso.
  - Gli infinitesimi sono numeri $\mathrm{d}x$ tali che, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $0 < \mathrm{d}x < \frac{1}{n}$.
  - In $\mathbb{R}$ non esiste alcun numero $\mathrm{d}x$ tale da soddisfare la condizione sopra, ma il **teorema di compattezza** assicura che esiste un insieme che include gli elementi per cui questo avviene.
  - La somma di un numero reale x e di un numero infinitesimo $\mathrm{d}x$ è un **numero iperreale** $x + \mathrm{d}x$.
  - Definita la funzione $\mathrm{st}(x)$ (parte standard) che, dato un numero iperreale, ne restituisce la parte reale, la definizione di derivata è:

$$f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x + \mathrm{d}x) - f(x)}{\mathrm{d}x}\right)$$

Derivate delle funzioni elementari

Funzione primitiva $f(x)$	**Funzione derivata** $f'(x)$
c	0
x^a	$a\,x^{a-1}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$1/x$

Regole di derivazione

- **Derivata di una somma**:

$$D\left[f(x)+g(x)\right]=f'(x)+g'(x)$$

- **Derivata di un prodotto**:

$$D\left[f(x)\cdot g(x)\right]=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

- **Derivata di un quoziente**:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

- **Derivata di una funzione composta**:

$$D\Big[f\left[g(x)\right]\Big]=f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)$$

Derivabilità e continuità

- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Se in x_0 f è **derivabile**, ovvero esiste il limite del rapporto incrementale, allora è anche continua.
- La continuità è condizione necessaria ma non sufficiente della derivabilità: possono esistere punti in cui f è continua ma non derivabile.
- La funzione f non è derivabile e presenta un **punto angoloso** in $x_0 \in \mathrm{int}(A)$ quando limite destro e sinistro del rapporto incrementale non coincidono:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Ogni funzione ottenuta a partire da funzioni elementari (come somma, prodotto, quoziente e potenza delle stesse) o che deriva da composizione di funzioni elementari è derivabile nel suo insieme di definizione, salvo poche eccezioni (es. $|x|$ in $x = 0$).

Derivate successive

- Definito f' dal limite del rapporto incrementale di f, è possibile definire un'ulteriore derivata f'' dal limite del rapporto incrementale di f'.
- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ derivabile in x_0 e $x_0 \in \mathrm{int}(A)$. Si definisce **derivata seconda** di f in x_0 il seguente limite, se esiste finito:

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

- In modo analogo si definiscono la **derivata terza** ($f'''(x)$), **quarta** ($f^{iv}(x)$), ..., n-**esima** ($f^n(x)$).

Un esempio con le leggi del moto

- Sia $s(t)$ una funzione che in ogni istante t fornisce la distanza percorsa da un corpo (per es. un'automobile) lungo una traiettoria.
- Il rapporto incrementale spazio/tempo a partire dall'istante t_0 rappresenta la **velocità media** nell'intervallo $[t_0, t_0 + h]$ (es. i Km percorsi in un'ora se $h = 60$ e il tempo è misurato in minuti):

$$\frac{\Delta s}{h} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

- Passando al limite $h \to 0$ otterremo la **velocità istantanea** in t_0:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h}$$

- La derivata seconda, il limite del rapporto incrementale velocità/tempo, ci fornisce l'**accelerazione istantanea**:

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t + h) - v(t)}{h}$$

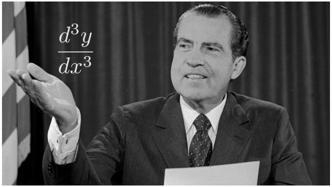
Derivate e inflazione

Nell'autunno del 1972, il presidente Nixon annunciò che "il tasso di aumento dell'inflazione stava diminuendo". Probabilmente la prima volta che un presidente in carica ha usato la derivata terza per aumentare le possibilità di essere rieletto.

(Fermat's Library su Twitter, 21 Settembre 2019)

- Dato il livello generale dei prezzi all'istante t, $p(t)$, la velocità di variazione dei prezzi (**inflazione**) è:

$$\pi(t) = p'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p(t+h) - p(t)}{h}$$



- Aumento/diminuzione dell'inflazione (accelerazione/decelerazione della variazione dei prezzi):

$$\pi'(t) = p''(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p'(t+h) - p'(t)}{h}$$

Calcolo marginale

- In economia si utilizza la nozione di derivata ogni volta che si fa riferimento a grandezze **al margine** (o **marginali**).
- Esempi:
  - **produttività marginale**: derivata della **funzione di produzione** rispetto a un fattore (quantità aggiuntiva ottenibile aumentando di un'unità l'impiego del fattore. Es. lavoro).
  - **costo marginale**: derivata della **funzione di costo** rispetto alla quantità (costo dell'ultima unità prodotta).
  - **ricavo marginale**: derivata della **funzione dei ricavi** rispetto alla quantità (aumento dei ricavi ottenibile vendendo un'unità in più).
  - **utilità marginale**: derivata della **funzione di utilità** rispetto a un bene (beneficio ricavabile dal consumo di unità aggiuntiva del bene).
  - **saggio marginale di sostituzione**: derivata lungo una **curva di indifferenza** (quantità di un bene cui si è disposti a rinunciare per ottenere in cambio un'unità aggiuntiva dell'altro bene).
  - **saggio marginale di trasformazione**: derivata lungo la **frontiera efficiente** (quantità di un bene cui si deve rinunciare per destinare le risorse all'aumento di un'unità di un altro bene).

Elasticità

- Il rapporto incrementale (rapporto tra **variazioni assolute**, Δy e Δx) come misura della reattività di y a x ha lo svantaggio che la misura di reattività dipende dalle unità di misura utilizzate.
- Per rendere indipendente la misura dalle unità è possibile utilizzare il rapporto delle corrispondenti **variazioni relative**: $\Delta y/y$ e $\Delta x/x$.
- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione derivabile con $x_0 \in \mathrm{int}(A)$, $x_0 \neq 0$ e $f(x_0) \neq 0$. L'**elasticità** di f in x_0 ($\epsilon_{f(x_0)}$) è il limite per $h \to 0$ del rapporto delle variazioni relative:

$$\epsilon_{f(x_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{h}{x_0}} = \frac{x_0}{f(x_0)} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{x_0}{f(x_0)} f'(x)$$

- Da notare che, poiché $D[\ln x] = 1/x$ e $D[\ln f(x)] = f'(x)/f(x)$, l'elasticità si può esprimere come rapporto tra differenziali di logaritmi:

$$\epsilon_{f(x_0)} = \frac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}\ln x}$$

Elasticità

Per l'elasticità valgono le seguenti relazioni:

$$\epsilon_{f(x_0)+g(x_0)} = \frac{f(x_0)}{f(x_0)+g(x_0)}\epsilon_{f(x_0)} + \frac{g(x_0)}{f(x_0)+g(x_0)}\epsilon_{g(x_0)}$$

$$\epsilon_{f(x_0)-g(x_0)} = \frac{f(x_0)}{f(x_0)-g(x_0)}\epsilon_{f(x_0)} - \frac{g(x_0)}{f(x_0)-g(x_0)}\epsilon_{g(x_0)}$$

$$\epsilon_{f(x_0)\cdot g(x_0)} = \epsilon_{f(x_0)} + \epsilon_{g(x_0)}$$

$$\epsilon_{f(x_0)/g(x_0)} = \epsilon_{f(x_0)} - \epsilon_{g(x_0)}$$