Matematica

11. Applicazioni delle derivate, problemi di ottimo e studio di funzione

Giuseppe Vittucci Marzetti[1]

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2020-21

[1]Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

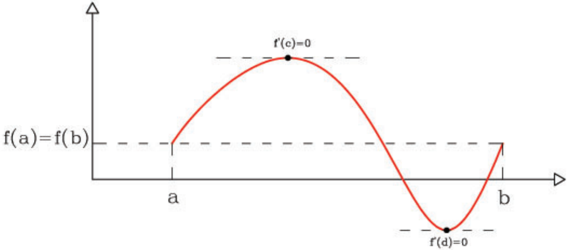
Layout

Teorema di Rolle

- Se una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ è:
  - continua in $[a, b]$;
  - derivabile in (a, b);
  - tale che $f(a) = f(b)$;

  allora

$$\exists\, c \in (a, b) : f'(c) = 0$$



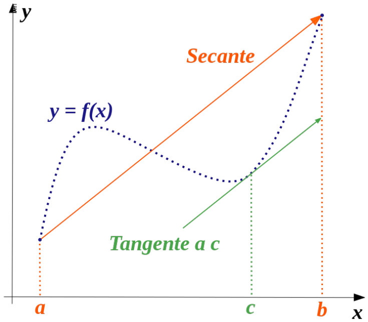
- Nella figura esistono due punti in cui la derivata prima è nulla.

Teorema di Lagrange

- Se una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ è:
  - continua in $[a, b]$;
  - derivabile in (a, b);

allora

$$\exists\, c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Fonte: CC BY-SA 3.0, Wikimedia.

Corollari del teorema di Lagrange

- **Primo corollario**: Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b):

$$f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = c$$

- **Secondo corollario**: Date due funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $g : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b):

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = g(x) + c$$

Teorema di Lagrange come formula di approssimazione

- Il teorema di Lagrange può essere interpretato come una formula di approssimazione.
- Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), per due punti $x_0, x \in [a, b]$ e un punto c compreso tra x e x_0 si ha:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$$

- Se $|f'(x)| \leq k \ \forall x \in (a, b)$, allora si ha:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k \cdot |x - x_0|$$

l'errore commesso nell'approssimazione non supera la quantità $k \cdot |x - x_0|$.

Teorema di Taylor

- Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ derivabile n volte in un punto $x_0 \in A$, per ogni punto $x \in A$ si ha:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \mathcal{O}((x - x_0)^n)$$

  dove $\mathcal{O}((x - x_0)^n)$ rappresenta una quantità che, per $x \to x_0$, è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$.

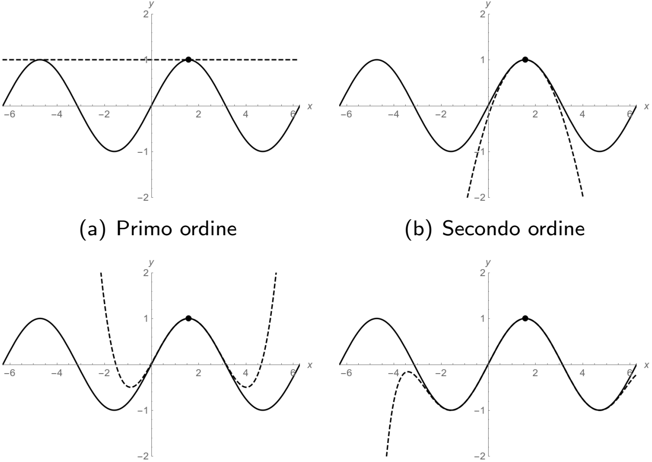
- Per $n = 1$ otteniamo l'approssimazione lineare:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathcal{O}(x - x_0)$$

- Con $x_0 = 0$ si ottiene la formula dello **sviluppo di MacLaurin**:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^n)$$

Esempio: approssimazione in serie di Taylor della funzione $\sin(x)$ nel punto $x_0 = \pi/2$



(a) Primo ordine

(b) Secondo ordine

(c) Quarto ordine

(d) Decimo ordine

Teorema di Taylor-Lagrange

- Dati una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definita e derivabile in (a, b) fino all'ordine n, e due punti $x_0, x \in (a, b)$, esiste un punto c compreso tra x e x_0 tale che:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

- Questo enunciato (teorema di Taylor-Lagrange) differisce dal precedente (teorema di Taylor-Peano) solo per l'ultimo termine.
- Se $|f^{(n)}(x)| \leq k \ \forall x \in (a, b)$, approssimando la funzione in x_0 all'ordine $n - 1$:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

l'errore in valore assoluto non supera $k \cdot \frac{(b-a)^n}{n!}$.

Teoremi di De l'Hôpital

- Siano f e g due funzioni derivabili in un intorno di x_0 $(0 < |x - x_0| < r)$ con $g'(x) \neq 0 \ \forall x : 0 < |x - x_0| < r$ ed esiste il limite del rapporto delle derivate, se:
  1. $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $g(x) \neq 0$ (forma di indecisione $\frac{0}{0}$); o
  2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ (forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$):

  allora
  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
- Sotto condizioni analoghe, il teorema vale anche nel caso in cui $x \to \pm\infty$.
- Il (secondo) teorema di De l'Hôpital può essere utilizzato per dimostrare la gerarchia degli infiniti.

Forme di indecisione (o di indeterminazione)

- Nelle seguenti sette forme, il valore del limite dipende dal comportamento delle specifiche funzioni coinvolte.
  - Somma:
  $$+\infty - \infty$$
  - Prodotto:
  $$0 \cdot \infty$$
  - Quoziente:
  $$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$
  - Potenza:
  $$1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0}$$
- Tali forme possono essere affrontate ricorrendo a:
  - teoremi di De l'Hôpital;
  - teoremi di Taylor.

Forma di indecisione ∞/∞

La forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$ può essere risolta:

- ricordando la gerarchia degli infiniti:

  Funzioni esponenziali $\gg$ Funzioni potenza $\gg$ Funzioni logaritmiche

- applicando il principio di eliminazione degli infiniti di ordine inferiore:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G(x)}$$

  dove $F(x)$ e $G(x)$ sono funzioni infinite di ordine superiore rispetto, rispettivamente, a $f(x)$ e $g(x)$;

- applicando il secondo teorema di De l'Hôpital.

Forma di indecisione 0/0

La forma di indecisione $\frac{0}{0}$ può essere risolta:

- applicando il principio di eliminazione degli infinitesimi di ordine superiore:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$
dove $F(x)$ e $G(x)$ sono funzioni infinitesime di ordine superiore rispetto, rispettivamente, a $f(x)$ e $g(x)$;
- applicando il primo teorema di De l'Hôpital;
- usando lo sviluppo di MacLaurin.

Forma di indecisione $+\infty - \infty$

La forma di indecisione $+\infty - \infty$ può essere risolta:

- applicando il principio di eliminazione degli infiniti di ordine inferiore (in una somma/differenza di infiniti si considera solo la parte principale dell'infinito, cioè l'infinito di ordine superiore);
- usando tecniche di "razionalizzazione";
- usando lo sviluppo di MacLaurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Forme di indecisione $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0 e ∞^0

- Le forme di indecisione 1^∞, 0^0 e ∞^0 possono essere ricondotte alla forma $0 \cdot \infty$:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x \to x_0} \left[\ln [f(x)]^{g(x)}\right]} =$$
$$= \mathrm{e}^{\lim_{x \to x_0} [g(x)] \lim_{x \to x_0} [\ln f(x)]} = \mathrm{e}^{0 \cdot \infty}$$

- La forma di indecisione $0 \cdot \infty$ può essere affrontata ricorrendo a:
  - i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x \,\mathrm{e}^x = 0$$

  - lo sviluppo di MacLaurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n)$$

Massimi e minimi assoluti e relativi

Data la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A$ si dice per la funzione f punto di

- **massimo assoluto** se:

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall\, x \in A$$

- **minimo assoluto** se:

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in A$$

- **massimo relativo** se $\exists\, \epsilon > 0$ tale che:

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$

- **minimo relativo** se $\exists\, \epsilon > 0$ tale che:

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$

Funzioni crescenti, decrescenti, punti stazionari e condizioni di primo ordine per un massimo/minimo

- Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ derivabile in un intervallo I è:
    - **crescente** in questo intervallo se e solo se:

    $$f'(x) \geq 0 \qquad \forall x \in I$$

    - **decrescente** in questo intervallo se e solo se:

    $$f'(x) \leq 0 \qquad \forall x \in I$$

- I **punti stazionari** sono i punti $x_0 \in A$ tale che:

$$f'(x_0) = 0$$

- Gli **estremanti relativi interni** di una funzione derivabile – punti di minimo relativo o massimo relativo interni all'insieme di esistenza della funzione – sono punti stazionari.
- La **condizione di primo ordine** (derivata prima nulla) è condizione necessaria ma non sufficiente perché il punto sia un punto di massimo/minimo relativo interno.

Regole per la determinazione dei punti di massimo/minimo

Consideriamo una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ derivabile e un punto stazionario di tale funzione ($f'(x_0) = 0$).

- **Prima regola**: Studiare il segno della derivata prima $f'(x)$.
  - Quando il segno passa da $+$ (funzione crescente) a $-$ (funzione decrescente), x_0 è un massimo relativo.
  - Quando il segno passa da $-$ (funzione decrescente) a $+$ (funzione crescente): x_0 è un minimo relativo.
- **Seconda regola**: Calcolare le derivate di ordine n in x_0 fermandosi alla prima che non è nulla:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

  allora, se n è
  - dispari, x_0 non è né un massimo né un minimo.
  - pari e
    - $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 è un massimo relativo;
      $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 è un minimo relativo.

Problemi di ottimo

- Nei **problemi di ottimo**, dopo aver individuato la **funzione obiettivo** da massimizzare/minimizzare, si determinano i massimi/minimi assoluti della funzione:

$$\max_{x} f(x) \qquad \qquad \min_{x} f(x)$$

- Se la funzione obiettivo è derivabile, condizione necessaria per avere un minimo/massimo interno (**condizioni di primo ordine**) è che la derivata sia zero.

Un esempio economico: livello di produzione ottimale

- Date:
  - la **funzione dei ricavi**, che associa la quantità prodotta q ai ricavi:
    $$R(q) = q \cdot p(q)$$
    dove q è la quantità e p il prezzo di vendita, funzione decrescente della quantità prodotta.
  - la **funzione di costo**, $C(q)$, che associa la quantità prodotta al costo di produzione.

  l'impresa sceglie quella quantità che massimizza i profitti P, dati dalla differenza tra ricavi e costi:
  $$\max_q \left[P(q)\right] = \max_q \left[R(q) - C(q)\right]$$
- Supponendo che la funzione di profitto sia derivabile e che la produzione venga scelta all'interno di quelle ammissibili, condizione necessaria per la massimizzazione è:
  $$P'(q) = R'(q) - C'(q) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R'(q) = C'(q)$$

Un esempio economico: livello di produzione ottimale

- Se al prezzo p il mercato riesce ad assorbire qualsiasi quantità offerta dall'impresa (caso di **concorrenza perfetta**), il prezzo di vendita è dato e costante e si ha:

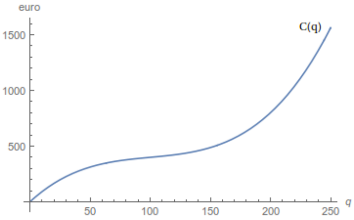
$$\max_q \left[P(q)\right] = \max_q \left[p \cdot q - C(q)\right]$$

- La condizione di primo ordine diventa semplicemente:

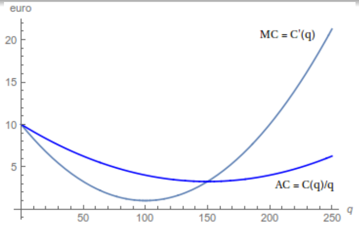
$$P'(q) = p - C'(q) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p = C'(q)$$

il prezzo uguaglia il **costo marginale**.

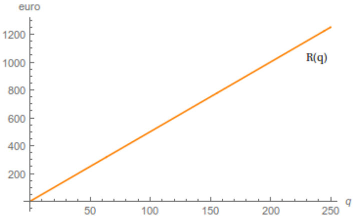
Un esempio economico: livello di produzione ottimale



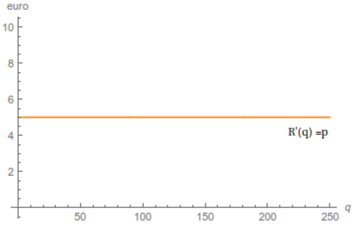
(a) Costi totali $C(q)$



(b) Costi marginali $C'(q)$

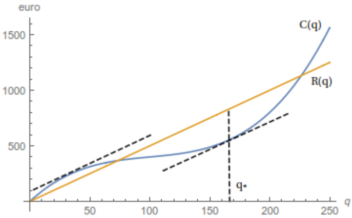


(c) Ricavi totali $R(q)$

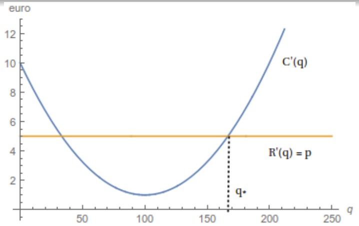


(d) Ricavo marginale in concorrenza perfetta (uguale al prezzo) $R'(q)$

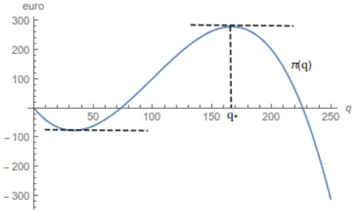
Un esempio economico: livello di produzione ottimale



(e) Ricavi totali e costi totali



(f) Ricavi marginali (prezzo) e costi marginali



(g) Profitti

Un esempio statistico: media campionaria come stimatore dei minimi quadrati

- Supponiamo di estrarre un campione di n unità da una popolazione (es. età di 50 studenti scelti a caso tra gli studenti di SCOR).
- Lo stimatore dei Minimi Quadrati (*Least Squares*) della media della popolazione (es. età media degli studenti di SCOR), m, risolve il seguente problema di minimizzazione:

$$\min_{m} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - m)^2$$

dove Y_i è l'osservazione i-esima (es. l'età di ciascuno degli studenti campionati).
- La condizione di primo ordine è:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left[\sum_{i=1}^{n} (Y_i - m)^2\right] = -2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - m) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$$

- La media campionaria minimizza la somma degli "errori" quadratici.

Un esempio economico: gestione ottimale delle scorte

- Il problema della **gestione delle scorte** sorge poiché
  - da una parte è più economico avere poca merce in magazzino e fare piccoli ordini frequenti per rifornirlo;
  - dall'altra parte, vi sono costi collegati alle singole ordinazioni.
- Supponiamo per semplicità che:
  - il fabbisogno di merce nel periodo di riferimento (es. un anno) è conosciuto e uniforme nel tempo;
  - il costo delle singole ordinazioni è costante ed è nullo il tempo intercorrente tra l'ordine e l'arrivo della merce.

Un esempio economico: gestione ottimale delle scorte

- La funzione da minimizzare sono i costi di gestione delle scorte, somma di:
  - **costi di ordinazione**, dati dal prodotto tra il costo della singola ordinazione (c_0) e il numero di ordini, a loro volta pari al rapporto tra il fabbisogno complessivo Q e la quantità q ordinata ogni volta.
  - **costi di magazzinaggio**, dati dal prodotto tra:
    - **costo unitario** c_1 (spese annuali di magazzino per singolo prodotto);
    - **giacenza media**, la quantità di merce che mediamente si trova nel magazzino, pari a $q/2$, calcolata come media tra la quantità in giacenza ad inizio periodo (0) e quella a fine periodo (q).
- Occorre determinare la quantità q che minimizza i costi:

$$\min_q C(q) = \min_q \left[c_0 \frac{Q}{q} + c_1 \frac{q}{2} \right]$$

- La condizione di primo ordine è (la soluzione positiva è l'unica rilevante):

$$C'(q) = -\frac{c_0 Q}{q^2} + \frac{c_1}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q = \pm\sqrt{\frac{2 c_0 Q}{c_1}}$$

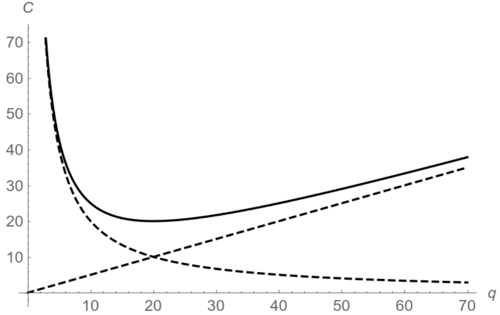
Un esempio economico: gestione ottimale delle scorte

- Nel caso in cui: $Q = 100$, $c_0 = 2$ e $c_1 = 1$, la funzione di costo è:

$$C(q) = 2\frac{100}{q} + \frac{q}{2}$$

- La quantità ottimale di unità di merce per ordinazione è:

$$q = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 100}{1}} = \sqrt{400} = 20$$



Convessità di una funzione

- Una funzione f definita in un intervallo I è convessa in I se:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

- In modo equivalente, f è convessa in I se:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in I \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

$$\begin{aligned}
f[\overbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}^{x}] &\leq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \\
f(x) &\leq f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f(x_1) + \lambda\, f(x_1) \\
f(x) &\leq f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - (1-\lambda)f(x_1) \\
f(x) &\leq f(x_1) + (1-\lambda)\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_2-x_1) \\
f(x) &\leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\Big((\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - x_1\Big) \\
f(x) &\leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)
\end{aligned}$$

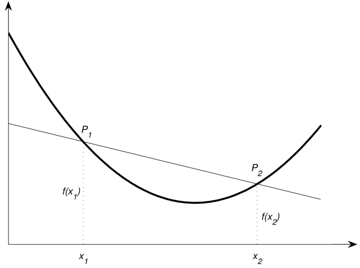
Concavità/convessità di una funzione

- Una funzione f definita in un intervallo I è:
  - **convessa** in I se:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in I \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

  - **concava** in I se:

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in I \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$



(a) Funzione convessa (b) Funzione concava

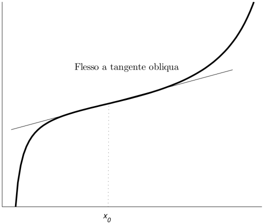
Fonte: Lacagnina & Piraino, 2011.

Concavità/convessità di una funzione

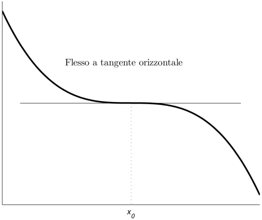
- Una funzione f derivabile in un intervallo I è:
  - **convessa** in I se e solo se la sua derivata f' è crescente;
  - **concava** in I se e solo se la sua derivata f' è decrescente.
- Una funzione f derivabile due volte (f' e f'') in un intervallo I è:
  - **convessa** in I se e solo se $f''(x) \geq 0$;
  - **concava** in I se e solo se $f''(x) \leq 0$.

Punti di flesso

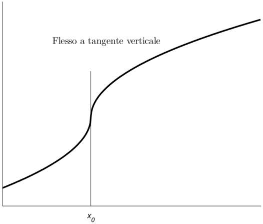
- Data una funzione f definita in un intervallo I, un punto x_0 interno a I è detto **flesso** per il diagramma di f quando esiste:
  - un suo intorno sinistro in cui f è convessa (concava);
  - un suo intorno destro in cui f è concava (convessa).
- **Regola per individuare i punti di flesso**: se f è derivabile due volte è possibile studiare il segno della derivata seconda ($f''(x) \geq 0$). I punti di flesso sono quelli in cui $f''(x)$ cambia di segno.



(a)



(b)



(c)

Fonte: Lacagnina & Piraino, 2011.

Studio di funzione

Con **studio di funzione** ci si riferisce ai passaggi che portano a disegnare un grafico qualitativo di una funzione f.

- Determinazione dell'insieme di esistenza della funzione.
- Identificazione di eventuali simmetrie (funzioni pari o dispari).
- Determinazione delle intersezioni con gli assi cartesiani.
- Determinazione del segno della funzione: $f(x) \geq 0$.
- Calcolo di limiti e asintoti.
- Ricerca di eventuali punti in cui $f(x)$ non è derivabile.
- Identificazione degli eventuali punti di massimo, minimo e flesso.