ESERCITAZIONE VII　　　　19-12-2018

ESERCIZIO 1

Dire se la funzione è continua nell'intervallo dato e, nel caso non lo sia, determinare la natura dei punti di discontinuità

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2-2x-3} & \text{se } x<0 \quad x \neq -1 \quad x \neq -2 \\ 3 & \text{se } x=0 \quad x=-1 \quad x=-2 \\ \sqrt{x^2+9} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$ La funzione è continua negli intervalli $(-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty)$

Proviamo la continuità nei punti $x=0$ $x=-1$ $x=-2$

$x=0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \quad ?$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x^2+9} = \sqrt{0+9} = 3$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x^2}{x^2-2x-3} = \frac{2 \cdot 0}{0-0-3} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) \quad ; \quad f(0) = 3$$

$x=0$ è un punto di discontinuità di prima specie (o discontinuità a salto)

$x=-1$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) \quad ?$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{x^2-2x-3} = \frac{2(-1^-)^2}{(-1^-)^2-2(-1^-)-3} \frac{-1-}{} =$$

$$= \frac{2}{1+2-3} = \frac{2}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{x^2-2x+3} = \frac{2 \cdot (-1^+)^2}{(-1^+)^2 - 2(-1^+)+3} = \frac{2}{0}$$

$$= \infty$$

$f(-1) = 3$

$x = -1$ è un punto di discontinuità di seconda specie

$x = -2$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) \quad ? \qquad f(-2) = 3$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{2x^2}{x^2-2x+3} = \frac{2(-2^-)^2}{(-2^-)^2 - 2(-2^-)+3} =$$

$$= \frac{8}{4+4+3} = \frac{8}{11}$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{2x^2}{x^2-2x+3} = \frac{2(-2^+)^2}{(-2^+)^2 - 2(-2^+)+3} =$$

$$= \frac{8}{4+4+3} = \frac{8}{11}$$

$$\exists \lim_{x \to -2} f(x) = \frac{8}{11} \neq f(-2) = 3$$

$x = -2$ è un punto di discontinuità di terza specie (o discontinuità eliminabile)

ESERCIZIO 2 Calcolare i seguenti limiti

1). $\lim_{x \to +\infty} (5x - 2x^2)$

2) $\lim_{x \to +\infty} (1+\sqrt{x})(e^{\frac{2}{x}} - 2)$

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$

4) $\lim_{x \to 0^-} \left(5 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x}\right)$

5) $\lim_{x \to 1} (2+x)^{3x}$

6) $\lim_{x \to 0^+} x\left(1 - \frac{2}{\log x}\right)$

1) $\lim_{x \to +\infty} (5x - 2x^2) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(\underbrace{\frac{5}{x}}_{\to 0} - 2\right) = \lim_{x \to +\infty} -2x^2 = -\infty$

2) $\lim_{x \to +\infty} (1+\sqrt{x})(e^{\frac{2}{x}} - 2) = (1+\infty)(e^{\frac{2}{\infty}} - 2) =$

$\infty \cdot (e^0 - 2) = \infty(1-2) = -\infty$

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1} = \frac{\infty \cdot \sqrt{\infty}}{\infty^2+1} = \frac{\infty}{\infty}$ [F I]

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x\sqrt{x}}}{\cancel{x^2}_{\sqrt{x}}\left(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

4) $\lim_{x \to 0^-} \left(5 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x}\right) = 5 + \frac{1}{\sqrt{0^++1}} - \frac{1}{0^-} = 5 + 1 + \infty =$

$= 6 + \infty = +\infty$

5) $\lim_{x \to 1} (2+x)^{3x} = (2+1)^{3 \cdot 1} = 3^3 = 27$

6) $\lim_{x \to 0^+} x\left(1 - \frac{2}{\log x}\right) = 0^+\left(1 - \frac{2}{\log 0^+}\right) = 0^+\left(1 - \frac{2}{-\infty}\right)$

$= 0^+(1+0) = 0^+(1) = 0^+$

ESERCIZIO 3 Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x-3} \qquad \text{CE: } \begin{array}{l} x-3 \neq 0 \\ x \neq 3 \end{array}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

ASINTOTI VERTICALI

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2+x}{x-3} = \frac{(3^-)^2 + (3^-)}{3^- - 3} = \frac{9+3}{0^-} =$

$= \frac{12}{0^-} = -\infty$ $\quad x = 3$ ASINTOTO VERTICALE SINISTRO

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2+x}{x-3} = \frac{(3^+)^2 + 3^+}{3^+ - 3} = \frac{9+3}{0^+} = \frac{12}{0^+}$

$= +\infty$ $\quad x = 3$ ASINTOTO VERTICALE DESTRO

$\Rightarrow x = 3$ ASINTOTO VERTICALE PER LA FUNZIONE

ASINTOTI ORIZZONTALI

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{2}}(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}})}{\cancel{x}(1-\frac{3}{x})} = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ NON VI E' L'ASINTOTO ORIZZONTALE A $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x}{x-3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x}\to 0)}{\cancel{x}(1-\frac{3}{x}\to 0)} = -\infty$$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ NON VI E' L'ASINTOTO ORIZZONTALE A $-\infty$

ASINTOTI OBLIQUI

L'asintoto obliquo è una retta del tipo

$$y = mx + q$$

dove $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$

- ASITOTO OBLIQUO A $+\infty$ (o destro)

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2+x}{x-3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x}{x-3} \frac{1}{x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x}\to 0)}{\cancel{x^2}(1-\frac{3}{x}\to 0)} = 1 \qquad m = 1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x}{x-3} - x =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}+3x}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}(1-\frac{3}{x}\to 0)}$$

$$= 4 \qquad q = 4$$

$y = x + 4$ è asintoto obliquo a $+\infty$

- ASINTOTO OBLIQUO A $-\infty$ (o sinistro)

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2+x}{x-3}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x}{x-3} \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}\right)} = 1 \qquad m = 1$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x}{x-3} - x =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2} + 3x}{x-3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{x-3} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}\right)} = 4 \qquad q = 4$$

$y = x + 4$ è asintoto obliquo a $-\infty$

$\Rightarrow$ $y = x + 4$ è asintoto obliquo sia destro che sinistro $\Rightarrow$

$y = x + 4$ è asintoto obliquo bilatero

ESERCIZIO 4

Stabilire se la relazione

$a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ è vera essendo

$a_n = \log(1+n)$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ per $x \to +\infty$ si ha che

$$f(x) = o(g(x))$$

se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Verifichiamo se $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\log(1+n)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \log(1+n) \cdot \sqrt{n} = \log(1+\infty) \cdot \sqrt{+\infty} = \log(\infty) \cdot \infty$$

$$= \infty \cdot \infty = \infty \neq 0$$

Dunque $a_n = o(b_n)$ è una relazione falsa

ESERCIZIO 5

Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni

a) $f(x) = 6x + 4$

b) $f(x) = x^3 + x + \sqrt{x}$

c) $f(x) = \log_3 x + 3^x$

d) $f(x) = 2x - \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \sqrt{4x+1}$

f) $f(x) = e^{3x+1}$

a) $f(x) = 6x+4$ $\quad f'(x) = 6 + 0 = 6$

b) $f(x) = x^3 + x + \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c) $f(x) = \log_3 x + 3^x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + 3^x \ln 3$

d) $f(x) = 2x - \sqrt[3]{x} = 2x - x^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = 2 - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 2 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

e) $f(x) = \sqrt{4x+1} = (4x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}-1}(4x+1)' = \frac{1}{\cancel{2}}(4x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{4}^{\,2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$$

f) $f(x) = e^{3x+1}$ $\quad f'(x) = e^{3x+1}(3x+1)' \Rightarrow$

$$f'(x) = e^{3x+1} \cdot 3 = 3e^{3x+1}$$

ESERCIZIO 6

Calcolare le prime Tre derivate delle seguenti funzioni

a) $f(x) = \log(x^2+1)$

b) $f(x) = e^{2x^2}$

a) $f(x) = \log(x^2+1)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = \frac{1}{x^2+1}\, 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^2 - (2-2x^2)\,2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+1)\left[-4x(x^2+1) - 4x(2-2x^2)\right]}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{\cancel{(x^2+1)}(-4x)\left[x^2+1+2-2x^2\right]}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{-4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

b) $f(x) = e^{2x^2}$

$$f'(x) = e^{2x^2}(4x) = 4x\, e^{2x^2}$$

$$f''(x) = 4(e^{2x^2}) + 4x(e^{2x^2})(4x) =$$

$$= 4e^{2x^2} + 16x^2 e^{2x^2} = 4e^{2x^2}(1+4x^2)$$

$$f'''(x) = 4e^{2x^2}(4x)(1+4x^2) + 4e^{2x^2}(8x) =$$

$$= 16\, x e^{2x^2}(1 + 4x^2 + 2)$$

$$= 16\, x e^{2x^2}(4x^2+3)$$

ESERCIZIO 7 Calcolare i seguenti limiti utilizzando il Teorema di De L'Hopital

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + \log x}{2x+1}$

2) $\lim\limits_{x \to 2} (3-x)^{\frac{1}{2-x}}$

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+\log x}{2x+1} = \dfrac{3\infty + \log\infty}{2\infty+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ [F I]

Possiamo applicare il theorema di De L'Hopital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \log x}{2x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{d}{dx}(3x + \log x)}{\frac{d}{dx}(2x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(3+\overbrace{\tfrac{1}{x}}^{\to 0})}{2\cancel{x}} =$$

$$= \frac{3}{2}$$

2) $$\lim_{x \to 2} (3-x)^{\frac{1}{2-x}} = (3-2)^{\frac{1}{2-2}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$$

Riscriviamo $$\lim_{x \to 2} (3-x)^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{x \to 2} e^{\log (3-x)^{\frac{1}{2-x}}} =$$

$$= \lim_{x \to 2} e^{\frac{1}{2-x} \log(3-x)} = e^{\lim_{x \to 2} \frac{\log(3-x)}{2-x}}$$

Risolviamo $$\lim_{x \to 2} \frac{\log(3-x)}{2-x} = \frac{\log(3-2)}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Applico De L'Hopital

$$\lim_{x \to 2} \frac{\log(3-x)}{2-x} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{3-x}(\cancel{-1})}{\cancel{-1}} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3-2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} (3-x)^{\frac{1}{2-x}} = e^{1} = e$$

3) $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0^+ \ln 0^+ = 0^+(-\infty) \quad FI$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad FI$$ Possiamo applicare De L'Hopital

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cancel{x}} \cdot (-x^{\cancel{2}}) =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

ESERCIZIO 8 Scrivere lo sviluppo di Taylor arrestato al terzo ordine, con punto iniziale $x = 2$, di $f(x) = 5x^2 + 7x - 2$

$N = 3 \qquad x_0 = 2 \qquad f(2) = 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 2 = 32$

$f'(x) = 10x + 7 \qquad f'(2) = 10 \cdot 2 + 7 = 27$

$f''(x) = 10 \qquad f''(2) = 10$

$f'''(x) = 0 \qquad f'''(2) = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + o(x-x_0)$$

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)(x-2)}{1!} + \frac{f''(2)(x-2)^2}{2!} +$$

$$+ \frac{f'''(2)(x-2)^3}{3!} + o(x-2)$$

$$f(x) = 32 + 27(x-2) + \frac{\overset{5}{\cancel{10}}(x-2)^2}{\cancel{2}\cdot 1} + \frac{0(x-2)^3}{3\cdot 2\cdot 1} + o(x-2)$$

$$f(x) = 32 + 27(x-2) + 5(x-2)^2 + o(x-2)$$

$$f(x) = 32 + 27x - 54 + 5(x^2 + 4 - 4x) + o(x-2)$$

$$f(x) = 32 + 27x - 54 + 5x^2 + 20 - 20x + o(x-2)$$

$$f(x) = 5x^2 + 7x - 2 + o(x-2)$$