Matematica

12. Serie

Giuseppe Vittucci Marzetti[1]

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2019-20

[1]Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

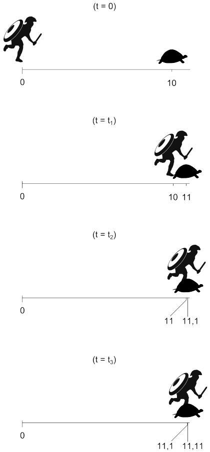
1. Sommatorie e serie
   - Paradosso di Achille e la tartaruga
   - Sommatoria
   - Attualizzazione, valore attuale e rendita perpetua
   - Successioni e serie
2. Serie a termini positivi
   - Serie di Mengoli
   - Serie geometrica
   - Esempi di serie geometriche
3. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi
   - Criterio del confronto
   - Criterio della radice
   - Criterio del rapporto
   - Serie armonica generalizzata e criterio dell'ordine di infinitesimo
4. Serie con termini di segno alternato

Il paradosso di Zenone di Achille e la tartaruga: la somma di infiniti addendi positivi è sempre infinita?

Achille, simbolo di rapidità, deve raggiungere la tartaruga, simbolo di lentezza.

Achille corre dieci volte più svelto della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille corre quei dieci metri e la tartaruga percorre un metro; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga percorre un millimetro; Achille percorre quel millimetro, la tartaruga percorre un decimo di millimetro, e così via all'infinito; di modo che Achille può correre per sempre senza raggiungerla.

(Borges, J.L., 1973, Metamorfosi della tartaruga, *Altre inquisizioni*)



Fonte: D. Pugliesi, Wikimedia

Il simbolo di sommatoria

- Il simbolo di **sommatoria**, $\sum$, permette di utilizzare una notazione abbreviata per le somme.
- Esempi:

$$\sum_{s=1}^{100} s = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{19} + \frac{1}{20}$$

$$\sum_{i=2}^{10} (-1)^i i^2 = 4 - 9 + 16 - 25 \ldots - 81 + 100$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

Attualizzazione, valore attuale e rendita perpetua

- L'**attualizzazione** (**discounting**) è l'operazione inversa della capitalizzazione.
- Dato il tasso di rendimento costante r, il valore attuale di una somma C_t corrisposta dopo t periodi è:

$$C_0 = \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

dove $\left(\frac{1}{1+r}\right)^t$ è chiamato **fattore di sconto**.

- Il **valore attuale** (**present value**) di un'**attività** (**asset**) che genera una sequenza di flussi di cassa $(C_1, C_2, \ldots, C_T)$ è pari a:

$$VA = \frac{C_1}{(1+r)^1} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C_T}{(1+r)^T} = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

- Il valore attuale di un asset che garantisce entrate costanti in ogni periodo per sempre (**rendita perpetua**, **perpetuity**) è:

$$VA = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^t}$$

Successioni e serie

- Data una **successione** (**sequence**), $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$, la somma dei primi n termini della successione è data da:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

- **Serie** è la somma degli infiniti termini della successione: $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.
- La serie ha carattere:
  - **convergente**, quando esiste finito il limite di s_n per $n \to +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = S$$

  - **divergente**, quando tale limite è infinito:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} s_n = -\infty$$

  - **irregolare**, od **oscillante**, quando tale limite non esiste.

Carattere di una serie

- Il carattere di una serie (convergenza, divergenza, irregolarità) coincide con quello della successione delle sue somme parziali $\{s_n\}$.
- Il carattere non cambia se:
  - si somma, sottrae o comunque modifica un numero **finito** dei suoi termini, per cui le proprietà della serie è sufficiente siano soddisfatte per ogni $n > n_0$;
  - si moltiplicano o dividono i suoi termini per una costante c:

$$s'_n = \sum_{k=1}^{n} (cu_k) = c \sum_{k=1}^{n} u_k = cs_n$$

    per cui anche nelle serie si può **raccogliere a fattor comune**.
- Condizione necessaria, ma non sufficiente, perché una serie sia convergente è che il suo termine generale sia infinitesimo per $n \to +\infty$.
- Le serie a termini positivi (di fatto quelle i cui termini hanno definitivamente segno costante) sono sempre regolari: convergono o divergono.

Serie di Mengoli

- Con il nome **serie di Mengoli** indichiamo la serie **convergente**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots$$

- Notando che:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

si ha infatti: $\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

- La serie è un esempio di **serie telescopica**, cioè serie con termine generale differenza di due termini successivi della successione:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = -a_0 + \lim_{n \to +\infty} a_n$$

Serie geometrica

- **Serie geometrica** di ragione (**common ratio**) q è la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$$

- Moltiplicando la somma parziale s_n per il termine $(1-q)$ si ottiene:

$$(1-q)s_n = (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1-q+q-q^2+q^2-q^3 \dots + q^{n+1} = 1-q^{n+1}$$

da cui, con $q \neq 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{1-\lim_{n\to+\infty} q^{n+1}}{1-q}$$

  - $q \geq 1$, $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ (**serie divergente**);
  - $-1 < q < 1$, $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1/(1-q)$ (**serie convergente**);
  - $q \leq -1$, s_n non ammette limite (**serie irregolare**).

Il paradosso di Zenone come serie geometrica convergente

- Indichiamo con T il tempo che Achille impiega a percorrere 10 metri (la distanza che lo separa dalla posizione iniziale della tartaruga).
- Poiché la tartaruga si muove a velocità pari a $1/10$ di quella di Achille, nello stesso tempo T la tartaruga percorre un decimo di quello spazio (1 metro).
- Per raggiungere la nuova posizione della tartaruga, Achille impiega un decimo del tempo precedente ($T/10$).
- In quel lasso di tempo, la tartaruga percorre una distanza pari a un decimo di quella percorsa da Achille (10 cm).
- Per percorrere quella distanza Achille impiega un decimo del tempo precedente ($T/10^2$), ecc.
- Sommando questi infiniti lassi temporali si ottiene il tempo *finito* che Achille impiega per raggiungere la tartaruga:

$$T+\frac{T}{10}+\frac{T}{10^2}+\ldots=T\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots\right)=T\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=\frac{10}{9}T$$

Calcolo del valore attuale

- Dato il tasso di rendimento r, il valore attuale di un asset che genera una sequenza periodica costante di flussi di cassa C per T periodi è:

$$VA = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r)^t} = C \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t = C\left(\sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t - 1\right)$$

$$= C\left(\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T+1}}{1-\frac{1}{1+r}} - 1\right) = C\,\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T}}{r}$$

- In caso di rendita perpetua si ha:

$$VA = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^t} = C \lim_{T\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T}}{r} = \frac{C}{r}.$$

poiché $\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T} = 0$ essendo $0 < \frac{1}{1+r} < 1$.

Espressione sotto forma di frazione di un numero periodico

- Esempio: il numero periodico $0,\bar{3}$ può essere scritto sotto forma di somma di infinite frazioni:

$$0,\bar{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots = 3\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right)$$
$$= 3\left(\frac{10}{9} - 1\right) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

- In generale è possibile mostrare che un numero periodico può essere scritto come una frazione che ha al:
  - numeratore, le cifre del periodo;
  - denominatore, tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

Criterio del confronto

Teorema del confronto

Date due serie a termini positivi $\sum^{+\infty} u_n$ e $\sum^{+\infty} v_n$ tali che $u_n \leq v_n$

- se $\sum^{+\infty} v_n$ è convergente, allora $\sum^{+\infty} u_n$ è convergente.
- se $\sum^{+\infty} u_n$ è divergente, allora $\sum^{+\infty} v_n$ è divergente.

- La serie $\sum^{+\infty} v_n$ è detta **maggiorante** della serie $\sum^{+\infty} u_n$.
- La serie $\sum^{+\infty} u_n$ è detta **minorante** della serie $\sum^{+\infty} v_n$.
- La relazione d'ordine $u_n \leq v_n$ può valere anche solo definitivamente, deve cioè esistere un n_0 tale che $u_n \leq v_n$ $\forall n > n_0$.

Criterio della radice (o di Cauchy)

Teorema della radice

Data una serie a termini positivi $\sum^{+\infty} u_n$ per cui esiste il limite di $\sqrt[n]{u_n}$ per $n \to +\infty$

- se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, la serie è convergente;
- se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$, la serie è divergente.

- **Dimostrazione che** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1 \Rightarrow \ \sum^{+\infty} u_n$ **è convergente**:
  - Dalle ipotesi segue che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$ con $0 \leq q < 1$;
  - Dalla definizione di limite si ha $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_\epsilon$ tale che:

$$q - \epsilon < \sqrt[n]{u_n} < q + \epsilon \qquad\qquad \forall\, n > n_\epsilon$$

  - Poiché la disuguaglianza sopra implica che $u_n < (q+\epsilon)^n$, $\forall\, n > n_\epsilon$, la serie geometrica $\sum^{+\infty}(q+\epsilon)^n$ è maggiorante di $\sum^{+\infty} u_n$.
  - Se ϵ è scelto in modo tale che $q + \epsilon < 1$, la serie geometrica è convergente.
  - Dal teorema del confronto segue che anche $\sum^{+\infty} u_n$ è convergente.

Criterio del rapporto (o di d'Alembert)

Teorema del rapporto

Data una serie a termini positivi $\sum^{+\infty} u_n$ per cui esiste il limite di $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ per $n \to +\infty$

- se $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la serie è convergente;
- se $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, la serie è divergente.

- **Dimostrazione che** $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow \sum^{+\infty} u_n$ **è convergente**:
  - Dalle ipotesi segue che $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ con $0 \leq q < 1$;
  - Dalla definizione di limite si ha $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_\epsilon$ tale che:

$$q - \epsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < q + \epsilon \qquad\qquad \forall\, n > n_\epsilon$$

  - Poiché la precedente disuguaglianza implica che, $\forall\, n > n_\epsilon$,

$$u_n < (q+\epsilon)^{n-n_\epsilon} u_{n_\epsilon}$$

    la serie geometrica $\sum^{+\infty} (q+\epsilon)^n \frac{u_{n_\epsilon}}{(q+\epsilon)^{n_\epsilon}}$ è maggiorante di $\sum^{+\infty} u_n$.
  - Se ϵ è scelto tale che $q + \epsilon < 1$, la serie geometrica è convergente e, per il teorema del confronto, lo è anche $\sum^{+\infty} u_n$.

Serie armonica

- **Serie armonica**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

- Dimostrazione per assurdo che **la serie è divergente**:
  - Supponiamo che la serie sia convergente e sia S il limite finito a cui converge la successione delle sue somme parziali $\{s_n\}$ per $n \to +\infty$;
  - La successione estratta $\{s_{2n}\}$ dovrebbe convergere allo stesso limite, e quindi $\lim_{n\to+\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$;
  - Tuttavia, poiché si ha:

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > 0$$

    ciò contraddice l'assunto iniziale e la serie armonica non può essere convergente.
  - Essendo una serie a termini positivi, la serie è necessariamente divergente.

Serie armonica generalizzata

- **Serie armonica generalizzata**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

- La serie è:
  - divergente se $\alpha \leq 1$:
    - la serie armonica con $\alpha = 1$ è divergente;
    - qualsiasi serie armonica con $\alpha < 1$ è maggiorante di quella armonica con $\alpha = 1$ per cui, dal teorema del confronto, segue che è divergente.
  - convergente se $\alpha > 1$;
- **Nota avanzata**:
  - In base al criterio dell'integrale, data una funzione $f : [n_0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ con $n_0 \in \mathbb{N}$ e una successione $\{u_n\}$ tale che $u_n = f(n)$ $\forall n \geq n_0$, se la funzione f è positiva, decresce ed è infinitesima per $n \to +\infty$, la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ converge se e solo se converge l'integrale $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$.
  - Calcolando l'integrale della serie armonica generalizzata si ottiene:

$$\lim_{m \to +\infty} \int_1^m \frac{1}{x^{\alpha}}\, \mathrm{d}x = \lim_{m \to +\infty} \begin{cases} \frac{m^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ \ln m & \alpha = 1 \end{cases}$$

Criterio dell'ordine di infinitesimo

- Due serie a termini positivi $\sum^{+\infty} u_n$ e $\sum^{+\infty} v_n$, i cui termini generali u_n e v_n hanno lo stesso ordine d'infinitesimo, sono cioè tali che esiste finito e diverso da zero il limite del loro rapporto:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$$

  hanno lo stesso carattere.
- Assunto $1/n^\alpha$ come infinitesimo campione, una serie a termini positivi $\sum^{+\infty} u_n$ con u_n infinitesimo per $n \to +\infty$ di ordine:
  - $\alpha > 1$, converge;
  - $\alpha \leq 1$, diverge.

Serie con termini di segno alternato

- Una serie con i termini di segno alternato è indicata come:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + \dots \qquad \text{con } u_n > 0$$

- La serie $\sum^{+\infty} u_n$ è **assolutamente convergente** quando converge la serie $\sum^{+\infty}|u_n|$.
- Se una serie è assolutamente convergente, allora è convergente.
- La convergenza assoluta è condizione sufficiente, ma non necessaria per la convergenza delle serie con termini di segno alternato.
- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ è convergente se:
  - u_n è infinitesimo;
  - $\exists\, n_0 : u_n \geq u_{n+1} \;\forall\, n > n_0$.