Note di matematica finanziaria
Attualizzazione e valore attuale

Giuseppe Vittucci Marzetti*

28 ottobre 2018

1 Successione e serie geometrica

Si ipotizzi una *successione* (o *progressione*) *geometrica* (*geometric sequence* o *geometric progression*):

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots, \}$$

da x è la *ragione* (*common ratio*) della successione.

La somma dei primi $T+1$ termini della successione (i termini $1, x, x^2, \dots, x^T$) è data da:

$$s_T = \sum_{t=0}^{T} x^t \tag{1}$$

Moltiplicando ambo i termini dell'equazione (1) per $(1-x)$ otteniamo:

$$(1-x)s_T = (1-x)\sum_{t=0}^{T} x^t = 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 \dots + x^{T+1} = 1 - x^{T+1}$$

da cui, con $x \neq 1$:

$$s_T = \sum_{t=0}^{T} x^t = \frac{1-x^{T+1}}{1-x} \tag{2}$$

La *serie geometrica* (*geometric series*) è il limite della successione delle somme parziali s_T nell'equazione (2) per $T \to \infty$:

$$\lim_{T\to\infty} s_T = \sum_{t=0}^{\infty} x^t \tag{3}$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126 Milano, Tel.: +39 02 64487457, Fax: +39 02 64487561. Email: giuseppe.vittucci@unimib.it

La serie è *convergente*, ovvero il limite della successione esiste ed è finito, quando $\|x\| < 1$ (x è in valore assoluto minore di 1). In questo caso si ha infatti:

$$\lim_{T\to\infty} x^{T+1} = 0$$

e pertanto:

$$\sum_{t=0}^{\infty} x^t = \lim_{T\to\infty} \frac{1-x^{T+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \tag{4}$$

Se consideriamo una successione geometrica senza il primo termine (non consideriamo l'1 iniziale), le somme parziali di questa successione sono:

$$\sum_{t=1}^{T} x^t = \sum_{t=0}^{T} x^t - 1 = \frac{1-x^{T+1}}{1-x} - 1 = \frac{x-x^{T+1}}{1-x} \tag{5}$$

La serie derivata è anch'essa convergente quando $\|x\| < 1$ e si ha:

$$\sum_{t=1}^{\infty} x^t = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} x^t = \frac{x}{1-x} \tag{6}$$

2 Attualizzazione e valore attuale

L'*attualizzazione* (*discounting*) è l'operazione inversa della capitalizzazione.

Assumendo interessi composti, dato il tasso di rendimento costante r, il valore attuale di una somma C_t corrisposta dopo t periodi è dato da:

$$C_0 = \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

dove $\left(\frac{1}{1+r}\right)^t$ è chiamato *fattore di sconto*.

Valore attuale Il *valore attuale* (*present value*) di un *asset* che genera una sequenza di flussi di cassa $(C_1, C_2, \ldots, C_T)$, dove C_t è il *flusso di cassa* (*cash flow*) generato nel periodo t, è pari a:

$$VA = \frac{C_1}{(1+r)^1} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C_T}{(1+r)^T} \tag{7}$$

Assumendo flussi di cassa costanti ($C_1 = \ldots = C_T = C$) e ricordando l'equazione (5) si ha:

$$\begin{aligned} VA &= \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r)^t} = C \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t \\ &= C \left(\frac{\frac{1}{1+r} - \left(\frac{1}{1+r}\right)^{T+1}}{1 - \frac{1}{1+r}} \right) = C \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T}{r} \end{aligned} \tag{8}$$

In particolare, assumendo di dover calcolare il valore attuale di un *asset* che garantisce entrate costanti in ogni periodo da qui all'eternità, dato il tasso di rendimento r, partendo dall'equazione (8) si ha:

$$VA = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^t} = C \lim_{T\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T}{r} = \frac{C}{r}. \tag{9}$$

Questo è il valore attuale di una *rendita perpetua* (*perpetuity*).